פתרון תרגיל 3 - אינפי 2 מדמ"ח

1) תהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.
הראו כי גם $|f(x)|$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. הוכיחו כי מתקיים $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

<u>פתרון</u>

נשתמש במשפט מן ההרצאה שלפיו אם f ו-g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ וגם לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\leq g(x)$ אז $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. נשים לב כי

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ לכל $x\in[a,b]$

לכן

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ומכאן נקבל את הנדרש

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

2) תהא $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית בכל קטע סופי, ומחזורית עם מחזור $T>0$ (כלומר $f(x+T)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$).
הוכיחו שהאינטגרל $I(a)=\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ אינו תלוי ב-a.

<u>פתרון</u> נוכיח שבעזרת החלפת משתנים (הזזה ב-T) ושימוש בנתון כי f מחזורית

עם מחזור T נכון לקבל שלכל מספר
שלם $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים

$$I(0)=\int_0^T F(x)\,dx=\int_T^{2T} F(x)\,dx=\dots=\int_{nT}^{(n+1)T} F(x)\,dx$$

לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_{nT}^{a} F(x)\,dx=\int_{(n+1)T}^{a+T} F(x)\,dx$$

כעת, יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{Z}$ המספר השלם
היחיד עבורו מתקיים $nT\le a<(n+1)T$
לפי 2 השוויונות הנ"ל נקבל

$$I(a)=\int_a^{a+T} F(x)\,dx=\int_a^{(n+1)T} F(x)\,dx+\int_{(n+1)T}^{a+T} F(x)\,dx$$

$$=\int_a^{(n+1)T} F(x)\,dx+\int_{nT}^{a} F(x)=\int_{nT}^{(n+1)T} F(x)\,dx=I(0)$$

ולכן $I(a)$ אינו תלוי ב-a ושווה ל-$I(0)$.

3) 1)

$$\int\frac{\cos x}{10+\sin x}\,dx=\left\{\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x\,dx=dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{dt}{10+t}=\ln|10+t|+c=\ln|10+\sin x|+c$$

2)

$$\int\frac{1}{1+e^x}\,dx=\int\frac{e^{-x}\,dx}{e^{-x}+1}=\left\{\begin{matrix}e^{-x}=t\\ -e^{-x}\,dx=dt\end{matrix}\right\}$$

$$=\int\frac{-dt}{1+t}=-\ln|1+t|+c=-\ln|1+e^{-x}|+c$$

$$\int \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right\} =$$ (3

$$= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} =$$ (4

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

$$\int \frac{\tan^5 x}{\cos^2 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \tan x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \end{array} \right\} =$$ (5

$$= \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{\tan^6 x}{6} + c$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1+2x}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+2x} = t \\ \frac{1}{\sqrt{1+2x}} dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{t} = dt \\ \qquad dx = t \, dt \end{array} \right\}$$ (6

$$= \int \frac{t \, dt}{1+t} = \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = \int 1 dt - \int \frac{dt}{1+t}$$

$$= t - \ln|1+t| + c = \sqrt{1+2x} - \ln|1+\sqrt{1+2x}| + c$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u=\cos\beta x & u'=-\beta\sin\beta x \\ v'=e^{\alpha x} & v=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \end{array} \right\}$$ (7

$$= \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\alpha} + \int \frac{\beta e^{\alpha x}\sin\beta x}{\alpha}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l|l} u=\sin\beta x & u'=\beta\cos\beta x \\ v'=e^{\alpha x} & v=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\alpha} - \int \frac{\beta}{\alpha}\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx\right] =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$$

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$$ נסמן

לכן

$$I = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2}I$$

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)I = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\sin\beta x}{\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}$$

$$\int \arctan x \, dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \arctan x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right\}$$ 8.

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right\}$$

$$= x \arctan x - \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t} dt =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+t| + c$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c.$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \{ x = a\sin t, \; dx = a\cos t\,dt \} =$$ 9.

$$= \int \frac{a^2 \sin^2 t \cdot a\cos t}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} dt = a^3 \int \frac{\sin^2 t \cos t}{a\sqrt{1-\sin^2 t}} dt$$

$$= a^2 \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\sqrt{\cos^2 t}} dt = a^2 \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t} dt$$

$$= a^2 \int \sin^2 t \, dt = a^2 \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt$$

$$= a^2 \int \frac{1}{2} dt - \frac{a^2}{2} \int \cos 2t \, dt$$

$$= \frac{a^2}{2} t - \frac{a^2}{4} \sin 2t + c$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a^2}{4} \sin\left[2a \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right] + c$$

כיוון: $\cos t \geq 0$ ו $t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \left\{ \begin{array}{l} t = \tan(\frac{x}{2}) \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right\} = \quad (10$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3}\,dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}}\,dt =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{4+4t+2t^2}{\cancel{1+t^2}}}\,dt = \int \frac{dt}{2+2t+t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \left\{ \begin{array}{l} u = t+1 \\ du = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c$$

$$= \arctan(t+1) + c =$$

$$= \arctan(\tan(\tfrac{x}{2}) + 1) + C.$$

$$\int x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & u' = \frac{2}{1-x^2} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \quad (11$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \int \frac{-x^2+1-1}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \int 1 - \frac{1}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x - \int \frac{dx}{1-x^2} =$$

פירוק לשב

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

$$\frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

$$A+B=1 \qquad A-B=0$$

$$A=B$$

$$\Downarrow$$

$$2A=1$$

$$B=A=\frac{1}{2}$$

לכן,

$$I = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x - \int \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x + \frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x| + c$$

$$\int x^6\sqrt{2x+3}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{2x+3} \Rightarrow x=\frac{t^2-3}{2} \\ dt=\frac{dx}{\sqrt{2x+3}} \end{array}\right\}$$

$$\int \left(\frac{t^2-3}{2}\right)^6 t^2\,dt = \frac{1}{64}\int \left(t^{12}-18t^{10}+135t^8-540t^6+1215t^4-1458t^2+729\right)t^2\,dt$$

$$=\frac{1}{64}\left(\frac{t^{15}}{15}-\frac{18t^{13}}{13}+\frac{135t^{11}}{11}-60t^9+\frac{1215t^7}{7}-\frac{1458t^5}{5}+243t^3\right)+C$$