<u>התרגיל מספר 3</u>

<u>את התרגיל יש להגיש בתרגול בתום חופשת הפסח.</u>

שאלה 1:

חשבו את הדטרמיננטות הבאות ע"י שימוש באלגוריתם השילוש של גאוס או פיתוח לפי שורה

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 0 & 16 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$ מעל $\mathbb{Z}_7$.

שאלה 2:

הוכיחו בעזרת הידוע לכם על השפעת פעולות אלמנטריות על דטרמיננטת מטריצה כי:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

שאלה 3:

יהי $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2), v_3 = (x_3, y_3)$ וקטורים ב-מישור הממשי כך

ש $v_3 \in Span\{v_1, v_2\}$ ו- v_1, v_2 בלתי תלויים לינארית . הוכיחו כי קיימים $a, b \in R$ כך ש

$$(1 - a - b) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}$$

שאלה 4:

תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ הוכיחו :

1. $|A + I| = |A| + 1$ אם"ם $tr(A) = 0$.
2. $tr(A) = 0$ או $|A| = 0$ אם"ם $|A + A^2| = |A| + |A|^2$.

בסעיף השני (ולגביו בלבד) <u>.אין</u> להשתמש בהצגה של המטריצה בצורה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ולעבוד עם

הרכיבים אלא להתבסס על מה שנעשה בסעיף הראשון.

שאלה 5:

א. חשבו את הדטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

ב. נתון שלכל פולינום f ממעלה $n>0$ מעל שדה F יש לכל היותר n שורשים בשדה.

($a \in F$ הוא שורש של f או"א $f(a)=0$)

<u>ללא שימוש בחישוב שביצעתם בסעיף</u> (א), הוכיחו כי (רמז בעמוד הבא)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$ באשר $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ שונים , שונה מאפס .

רמז: ניתן להשתמש במטריצה המשוחלפת . השתמשו בעובדה שצוינה לעיל ובמה שידוע לכם בנושא פיתרונות של מערכת משוואות לינארית.

שאלה 6:

מצאו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}$$

קיבלתם פולינום $p(t)$ ב t . הציבו בו את המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

ז"א חשבו $p(B)$ מה קיבלתם?

נשים לב ש $A=tI-B$ באשר $tI=\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$.

נניח ש $|tI-B|=0$ האם קיים וקטור $0 \neq \bar{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ כך ש $(tI-B)\bar{v}=\bar{0}$,באשר $\bar{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(ז"א האם יש פיתרון לא טריוויאלי למערכת המשוואות?)נמקו תשובתכם. אם הגעתם למסקנה שקיים $\bar{v}$ שכזה ,מצאו כזה וקטור.