הגדרה :תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. ה$trace$ של A (עקבה) מוגדר להיות : סכום איברי האלכסון.

$$tr(A) = \Sigma_{i=1}^{n} A_{i,i}$$

דוגמא :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 12 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & -11 \end{pmatrix}$$

$$tr(A) = 1 + 7 - 11 = -3$$

תכונות :

1. לכל מטריצה ריבועית A ולכל סקלר α מתקיים : $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
2. לכל מטריצה ריבועית A מתקיים : $tr(A) = tr(A^t)$ (איברי האלכסון לא משתנים במטריצה המשוחלפת)
3. לכל שתי מטריצות ריבעיות מאותו גודל מתקיים :

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

הוכחה :

$$tr(A+B) = \Sigma_{i=1}^{n}(A+B)_{i,i} = \Sigma_{i=1}^{n}(A_{i,i}+B_{i,i}) = \Sigma_{i=1}^{n}A_{i,i}+\Sigma_{i=1}^{n}B_{i,i} = tr(A)+tr(B)$$

4. $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $tr(AB) = tr(BA)$ (שימו לב ש$AB \in \mathbb{F}^{m\times m}, BA \in \mathbb{F}^{n\times n}$)

הוכחה :

$$tr(AB) = \Sigma_{i=1}^{m}(AB)_{i,i} = \Sigma_{i=1}^{m}\Sigma_{j=1}^{n}A_{i,j}B_{j,i}$$

$$tr(BA) = \Sigma_{j=1}^{n}(BA)_{j,j} = \Sigma_{j=1}^{n}\Sigma_{i=1}^{m}B_{ji}A_{i,j} = \Sigma_{j=1}^{n}\Sigma_{i=1}^{m}A_{i,j}B_{j,i}$$

זיכרו שסדר של סכימה הוא לא משנה.

תרגיל : תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. הוכיחו ש$tr(AA^t) = 0 \iff A = 0$

הוכחה : $\Longrightarrow$ אם $A = 0$ אז $AA^t = 0$. ולכן $tr(AA^t) = 0$.

$\Longleftarrow$: $AA^t \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

$$0 = tr(AA^t) = \Sigma_{i=1}^{m}(AA^t)_{i,i} = \Sigma_{i=1}^{m}(\Sigma_{j=1}^{n}A_{ij}A^t_{ji}) = \Sigma_{i=1}^{m}\Sigma_{j=1}^{n}A_{ij}A_{ij} =$$

$$\Sigma_{i=1}^{m}\Sigma_{j=1}^{n}A_{ij}^2$$

זה סכום של כל איברי המטריצה בריבוע. ומכיוון שכל האיברים ממשיים, אם סכום של איברים בריבוע יוצא 0, אז כל אחד מהם שווה ל0. ולכן כל איברי המטריצה הם 0. כלומר, $A = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & \\ & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

תזכורת: בתרגול הקודם הוכחנו: לכל מטריצה A, AA^t היא סימטרית.

1. האם כל מטריצה ממשית סימטרית היא מהצורה AA^t? (כלומר, אם B ממשית סימטרית, האם קיימת מטריצה A כך ש$B = AA^t$)
הצעה:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נניח בשלילה שקיימת איזשהי מטריצה ממשית A כך ש: $B = AA^t$. ראינו, שלכל A, במטריצה AA^t, באיברי באלכסון שלה יש תמיד סכום של מספרים ריבועיים, ולכן מספר אי שלילי.

תזכורת: בתרגול הקודם הוכחנו שלכל מטריצה ריבועית A, $(A + A^t)$ סימטרית.

1. האם כל מטריצה ממשית סימטרית היא מהצורה $A + A^t$? (כלומר אם B מטריצה ממשית סימטרית. האם קיימת איזשהי מטריצה A כך ש$B = A + A^t$)

פתרון: כן. נקח $A = \frac{1}{2}B$.

$$(\frac{1}{2}B) + (\frac{1}{2}B)^t = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}(B^t) = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B$$

הפיכות

1. תהא A ריבועית. הוכיחו כי A הפיכה אמ"מ קיים n טבעי עבורו A^n הפיכה.
הוכחה: $\Leftarrow$ נניח שA הפיכה. אפשר לקחת $n = 1$. A^n הפיכה.
$\Longrightarrow$: A^n זאת מכפלה של A n פעמים. הוכחתם בהרצאה שאם מכפלה של מטריצות היא הפיכה אז כל אחת מהן הפיכה. (AB הפיכה גורר שגם A וגם B הפיכות)
הוכחה נוספת: A^n הפיכה אז יש לה הופכית.

$$A^n (A^n)^{-1} = I$$

לכן

$$A \left(A^{n-1} (A^n)^{-1} \right) = I$$

לכן A הפיכה.

2. תהא A ריבועית. הוכיחו כי A הפיכה אמ"מ לכל n טבעי מתקיים A^n הפיכה.
$\Longrightarrow$ בפרט, מתקיים עבור $n = 1$.
$\Longleftarrow$ נתון שA הפיכה. אז A^n היא מכפילה של הפיכות ולכן הפיכה.

3. תרגיל המשך: אם A^5 הפיכה אז A^3 הפיכה.
הוכחה: A^5 הפיכה $\Longleftarrow$ A הפיכה $\Longleftarrow$ A^3 הפיכה.

4. A הפיכה אמ"מ A^t הפיכה. במקרה זה מתקיים $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$ ולכן מסמנים A^{-t}.
הוכחה:

$$A^t \cdot \left(A^{-1}\right)^t = \left(A^{-1} \cdot A\right)^t = I^t = I$$

ולכן A^t הפיכה, ההופכית שלה היא $(A^{-1})^t$.

5. תרגיל: הוכיחו שאם A סימטרית והפיכה אז A^{-1} סימטרית.
הוכחה: נתון:

$$A = A^t$$

$$A^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

6. תרגיל: בהרצאה הוכחתם שמטריצה שיש לה שורת אפסים היא לא הפיכה.
שאלת המשך: הוכיחו שמטריצה שיש לה עמודת אפסים אינה הפיכה.
פתרון: תהי A מטריצה שיש בה עמודת אפסים. נסתכל על A^t. בA^t יש שורת אפסים. לכן A^t לא הפיכה. אבל הוכחנו שA הפיכה אמ"ם A^t הפיכה ולכן A לא הפיכה.
דרך נוספת: נסמן את עמודת האפסים של A בתור העמודה ה-j. כלומר, $C_j(A) = 0$.
נניח בשלילה שA הפיכה.

$$C_j(A^{-1}A) = A^{-1}C_j(A) = A^{-1} \cdot 0 = 0$$

סתירה לכך ש$A^{-1}A = I$. ובI אין עמודות אפסים. סתירה. ולכן A לא הפיכה.

7. הוכיחו כי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ הפיכה ומצאו את ההופכית.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{0.5R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \end{array}\right)$$

8. תהא A ריבועית כך ש $A+A^2$ הפיכה. הוכיחו A ו $A+I$ הפיכות.
פתרון: $A+A^2=A(A+I)$. כזכור, אם מכפלה של מטריצות היא הפיכה, אז כל אחת מהן הפיכה.

9. שאלה: אם A הפיכה, האם $A+I$ הפיכה?
תשובה: לא.

$$A=-I$$

הפיכה.

$$A+I=0$$

שהיא לא הפיכה.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

הפיכה כי אפשר לראות שהצורה המדורגת קנונית שלה היא I.

$$A+I=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה עם שורת אפסים ולכן לא הפיכה.
חשוב להדגיש: מטריצה בלי שורת/ עמודת אפסים היא לא בהכרח הפיכה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$tamarnachshoni@gmail.com$

10. עבור $A\neq 0$ ריבועית: A לא הפיכה אמ"מ היא מחלקת אפס. ($A\neq 0$ נקראת מחלקת אפס אם קיימת מטריצה $B\neq 0$ כך ש$AB=0$או $BA=0$)

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור $A\neq 0$ ריבועית: A לא הפיכה אמ"מ היא מחלקת אפס. ($A\neq 0$ נקראת מחלקת אפס אם קיימת מטריצה $B\neq 0$ כך ש$AB=0$או $BA=0$)

פתרון: $\Longrightarrow$ תהי A מטריצה מחלקת 0. קיימת איזשהי מטריצה $B \neq 0$ כך $AB = 0$ או $BA = 0$.
נניח בלי הגבלת הכלליות ש$AB = 0$. נניח בשלילה שA הפיכה.

$$A^{-1}\ /AB = 0$$

$$A^{-1}AB = A^{-1}0$$

$$IB = 0$$

$$B = 0$$

סתירה. (אם זה היה בכיוון השני)

$$BA = 0/A^{-1}$$

$$BAA^{-1} = 0A^{-1}$$

$$B = 0$$

כיוון שני: נניח שA. בהרצאה הוכחתם שA הפיכה אמ"ם למערכת ההומוגונית יש פתרון יחיד.
לכן אם A לא הפיכה למערכת ההומוגנית יש יותר מפתרון אחד. כלומר, קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש$Av = 0$.

$$0 \neq B = (v, ..., v)$$

$$AB = (Av, ..., Av) = (0, .., 0)$$