

טעויות נפוצות בבוחן – אלגברה לינארית 1

סמסטר א', תשע"ו

בקובץ הזה כתובות טעויות שהופיעו בבוחן אצל מספר סטודנטים. מומלץ לקרוא את הכל ולהבין מה הבעיה בכל סעיף:

1. היו הרבה שבמקום להוכיח, נתנו דוגמה. **אי אפשר להוכיח עם דוגמה!** היו סטודנטים שהוכיחו באמצעות דוגמאות דברים שגויים, ובכלל - כשרוצים להוכיח, אפשר לקחת דוגמה כדי להבין מה קורה בשאלה, אבל צריך לכתוב פורמלית איך מוכיחים את זה¹.

2. אי אפשר להניח הנחות שלא נתונות בשאלה. למשל, אי אפשר להניח פתאום שמטריצה נתונה A היא הפיכה, אנטי-סימטרית וכיוצ"ב.

3. כשיש שאלה של פתרון מערכת משוואות, שמים במטריצה ומדרגים עד לצורה מדורגת (לפחות). היו הרבה ששמו במטריצה, התחילו לדרג, הפסיקו באמצע ובחרו ערכים חשודים כלשהם (שלרוב לא היו נכונים).

4. כשמדרגים, חשוב לשים לב שלא עושים פעולות לא חוקיות כמו לחלק ב- a . אם, למשל, בכל זאת מחליטים לחלק ב- a , הערך $a = 0$ הופך להיות חשוד, וכדי לבדוק מה קורה מציבים אותו במטריצה שהייתה צעד אחד לפני הפעולה הלא-חוקית. למשל, אי-אפשר לחלק ב- a , לעשות כמה צעדים, להכפיל ב- a ולהציב בסוף $a = 0$.

5. בשאלה 1 סעיף א', היו לא מעט סטודנטים שהגיעו לצורה המדורגת הנכונה,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 3-a & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4a+3 & 3-a \end{array} \right)$$

ואז אמרו שהערכים החשודים הם $a = 1, 2, 3$. אז לא טעות, פשוט הערך $a = 2$ לא חשוד (במקרה הזה, אין אף איבר מוביל שמתאפס).

6. יש כמה ששאלו במהלך הבוחן ו/או כתבו בתשובה שהמטריצה A היא ריבועית (מגודל

3×3), ולכן היא הפיכה. זה בוודאי **לא נכון**. למשל, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא מטריצה ריבועית

שאינה הפיכה. גם $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא מטריצה כזו. הנתון שמטריצה A ריבועית אומר אך

ורק שמספר השורות שלה שווה למספר העמודות.

¹מדוע אסור להסתמך על דוגמה: פרמה בזמנו התבונן ב- $2^{2^n} + 1$, והציב $n = 1, 2, 3, 4$. הוא קיבל שבכולם יוצא מספר ראשוני. הוא שיער שלכל n המספר $2^{2^n} + 1$ ראשוני, אבל כבר עבור $n = 5$ זה לא נכון.

7. באופן כללי, כשמבקשים לבדוק האם מטריצה הפיכה, אחרי שמדרגים את $(A | I)$ כדאי לכתוב שורה להסביר מדוע A הפיכה. למשל: הצורה המדורגת קנונית של A היא I , ולכן, לפי משפט מההרצאה, המטריצה A הפיכה.

8. בשאלה 2 סעיף א', היו הרבה שהגיעו למשוואה $\alpha A + \beta A^t = \beta A + \alpha A^t$, ומפה הסיקו ישירות ש- $\alpha = \beta$ בלי נימוק. חייבים לנמק הכל!

9. היו סטודנטים שכתבו $a_{ij} \in A$. אין דבר כזה! הסימון \in מדבר על קבוצה, ולא על מטריצה.

10. זכרו שאם $AB = 0$, זה לא אומר ש- $A = 0$ או $B = 0$. למשל, אם יודעים בשאלה 2 סעיף ב' ש- $(A + I)(A - I)(A - 2I) = 0$, זה לא אומר ש- $A = I$, $A = -I$ או $A = 2I$. גם

המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ מקיימת את תנאי השאלה, אך היא אינה סקלרית.

למעשה, למשוואה הנתונה יש אינסוף פתרונות: למשל, בגודל 3×3 , אם P מטריצה הפיכה

אז גם $P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ פתרון של המשוואה הנתונה.

11. אי אפשר סתם לחלק במטריצה בלי לדעת שהיא הפיכה. למשל, אם $A^3 - 2A^2 + A = 0$, לא יודעים ישר ש- $A^2 - 2A + I = 0$.

12. אין דבר כזה $A + 1$, $A - 2$ וכד' - אי אפשר לחבר או לחסר מספר ממטריצה! שימו לב שמתקיים

$$A^2 - A = A(A - I)$$

ולא $A(A - 1)$.

13. אם יש פרמטרים בשאלה, אסור להשתמש בהם בסימונים שלכם. בפרט, בשאלה 3 סעיף

א', היו כאלו שסימנו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ מי שעשה זאת קיבל ש-

$a = b = c = 0$, וזה לא נכון.