# פתרון מבחן בלינארית 2
# מועד א תשע"ז

ד"ר אליהו מצרי

פתרונות: שירה. אלי לא אחראי אם יש טעויות.

1. נסח והוכח את משפט ההצגה של ריס.

2. יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית, $U \leq V$ תת־מרחב, ותהי $T \in End(V)$.

   (א) הגדירו מהי ההעתקה הצמודה של $T$ ואת המרחב הניצב ל$U$.

   (ב) הוכיחו כי $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = \mathrm{Ker}(T^*)$.
   $v \in \mathrm{Im}(T)^{\perp} \Longleftrightarrow \forall w\ \langle v, Tw\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall w\ \langle T^*v, w\rangle = 0 \Longleftrightarrow T^*v = 0 \Longleftrightarrow v \in \mathrm{Ker}T^*$.

   (ג) הוכיחו כי $\mathrm{Ker}(T)^{\perp} = \mathrm{Im}(T^*)$.
   לפי סעיף א' (אחרי החלפת תפקידים $T \leftrightarrow T^*$) קיבלנו $\mathrm{Im}(T^*)^{\perp} = \mathrm{Ker}(T)$.
   נקח את המרחבים הניצבים: $\mathrm{Im}(T^*)^{\perp^{\perp}} = \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$ וקיבלנו את הדרוש.

3. תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

   (א) מצאו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של $A$.
   נחשב פולינום אופייני:

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x-4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x-4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & x-4 \end{vmatrix} \overset{R_4=R_4+R_3+R_2+R_1}{=} \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x-4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x-4 & -1 \\ x-7 & x-7 & x-7 & x-7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_i=C_i-C_4}{=} \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & x-3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-7 \end{vmatrix} = (x-3)^3(x-7)$$

ולכן הפולינום המינימלי הוא מהצורה $(x-3)^i(x-7)$ כאשר $1 \le i \le 3$.
נבדוק:

$$(A-3I)(A-7I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

ולכן $(x-3)(x-7)$ הוא הפולינום המינימלי.

(ב) הוכיחו כי $A$ ניתנת ללכסון אורתוגונלי ומצאו מטריצה אורתוגונלית $P$ ומטריצה אלכסונית $D$ כך ש $P^TAP=D$.

$A$ היא סימטרית (צמודה לעצמה) ולכן נורמלית. בנוסף הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים ולכן לפי המשפט הספקטראלי $A$ ניתנת ללכסון אורתוגונלי.

נמצא ו"ע לע"ע 3:
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס למרחב העצמי הוא
$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$
והריבוי הגיאומטרי הוא 3.

נמצא ו"ע לע"ע 7:
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

בסיס למרחב העצמי הוא $\left\{ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ והריבוי הגיאומטרי הוא 1.

נבצע גרהם־שמידט על כל קבוצת בסיסים:

$$w_1 = v_1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \overline{w_1};$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1 \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} - w_2 = v_2 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \overline{w_2};$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = w_1 \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} - w_2 \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} - w_3 = v_3 \longrightarrow = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \overline{w_3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

וכמו כן: $\overline{w} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

אזי $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ו $D = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 7 \end{pmatrix}$.

4. הוכח או הפרך:

(א) יהי $T$ אופרטור הצמוד לעצמו, אזי $T + iI$ אופרטור חח"ע.

הפרכה:

אם הוא לא היה חח"ע זה אומר שהיה $v \neq 0$ כך ש $(T + iI)v = 0$ מה שאומר ש$v$ הוא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי $-i$, בסתירה לכך שלאופרטורים צמודים לעצמם יש רק ע"ע ממשיים.

(ב) אם $U_1, U_2$ אופרטורים אוניטרים אז גם $U_1 + U_2$ אופרטור אוניטרי.

הפרכה:

$I$ ו־$-I$ הן אוניטריות אבל $I+(-I)=0$ היא לא אוניטרית.

(ג) אם למטריצות $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ יש אותו פולינום אופייני ומינימלי אז הן דומות.

הפרכה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ ו } \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(ד) אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מקיימת כי $A^2$ ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{R}$, אז $A$ ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{R}$.

הפרכה:

נתבונן במטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ שהיא כידוע לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$ (הפולינום האופייני הוא $x^2+1$ לא מתפרק לגורמים לינאריים).

לעומת זאת $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ היא כבר אלכסונית.