תרגיל 6 / ליניארית להנדסה תשעז

להגשה בתרגול, בשבוע המתחיל ב־ י"ח כסלו, 18.12

15 בדצמבר 2016

1. תהי A מטריצה. הוכח או הפרך:
   א. אם $A+A^2$ הפיכה אז A הפיכה.
   ב. אם A הפיכה אז $A+A^2$ הפיכה.
   ג. אם $A^2=A$ אז $A=I$ או A איננה הפיכה.
   ד. אם ב־A יש עמודות אפסים אז A איננה הפיכה.

פיתרון:

א. הוכחה: מתקיים $A+A^2=A(A+I)$ וראינו שאם מכפלת מטריצות היא הפיכה אז כל אחת מהמטריצות הפיכה. לכן A הפיכה.

ב. הפרכה: ניקח $A=-I$ שהיא הפיכה. נקבל ש־$A^2=I$ ולכן $A+A^2=0$ לא הפיכה.

ג. הוכחה: נניח $A^2=A$. אם $A=I$ סיימנו. אחרת (כלומר, $A\neq I$) נקבל ש־ $0=A-A=A^2-A=A(A-I)$, וכיון ש־$A-I\neq 0$ נובע ש־A מחלקת אפס ולכן לא הפיכה.

ד. הוכחה: נניח בשלילה שהיא הפיכה ונניח שעמודת האפסים היא i. אזי קיימת מטריצה B כך ש־ $BA=I$. לפי כפל עמודה עמודה נקבל

$$C_i(BA)=C_i(I)$$

$$\Downarrow$$

$$BC_i(A)=e_i$$

$$\Downarrow$$

$$0=B\cdot 0=e_i$$

בסתירה לכך שיש 1 במיקום ה־i של e_i (לפי הגדרה).

2. א. תהיינה $A\in\mathbb{R}^{m\times n},B\in\mathbb{R}^{k\times n}$. נתבונן בתתי מרחבים $U=\{x\in\mathbb{R}^n|Ax=0\},V=\{x\in\mathbb{R}^n|Bx=0\}$. מצא מטריצה C עבורה $U\cap V=\{x\in\mathbb{R}^n|Cx=0\}$. נמק.

ב. נתייחס ל- $x\in\mathbb{R}^n$ כוקטור עמודה, ותהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה. הוכח או הפרך: $\{x\in\mathbb{R}^n|Ax=0\}=\{x\in\mathbb{R}^n|x^tA=0\}$.

פיתרון

א. נשים לב ש־V זהו מרחב הפתרונות של מערכת מישוואות הומוגנית המיוצגת ע"י המטריצה B, ו־U זהו מרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית המיוצגת ע"י A. לכן $x\in U\cap V$ אם ורק אם הוא פתרון למערכת המשוואות המיוצגת ע"י A וגם למערכת המשוואות המיוצגת ע"י B. זה קורה אם ורק אם הוא פיתרון למערכת המשוואות המיוצגת ע"י $C=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(m+k)\times n}$ (כיון שמערכת משוואות זו מערכת "וגם").

נסביר עוד קצת: נשים לב שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים (לפי כפל שורה שורה):

$$R_i(Cx)=R_i(C)\cdot x\Rightarrow Cx=\begin{pmatrix}Ax\\Bx\end{pmatrix}$$

כלומר, m השורות הראשונות הן הכפל Ax, ו־k השורות האחרונות הן הכפל Bx. ולכן:

$$Cx=0\iff Ax=0\wedge Bx=0$$

ב. הפרכה: ניקח $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$. ונתבונן בוקטור $v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. נשים לב ש- $Av=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, ואילו $v^tA=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}\neq0$. כלומר $v\in\{x\in\mathbb{R}^n|Ax=0\}\wedge v\notin\{x\in\mathbb{R}^n|x^tA=0\}$, ולכן אין שיוויון.

3. יהי V מ"ו, ותהיינה $A,B\subseteq V$ תתי קבוצות. הוכיחו: $span(A\cap B)=span(A)\cap span(B)$.

פיתרון

כאמור, השאלה לא נכונה. אמנם ההכלה $\subseteq$ נכונה:

יהי $v\in span(A\cap B)$ אזי יש $v_1,\dots v_n\in A\cap B,\alpha_1,\dots\alpha_n\in\mathbb{F}$ כך ש: $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i$. כיון ש- $A\cap B\subseteq A,B$ נובע ש- $v_1,\dots v_n\in A,B$, ולכן $v\in span(A)\wedge v\in span(B)$, ולכן $v\in span(A)\cap span(B)$.

הכיון ההפוך לא תמיד נכון. למשל, ניקח את $V=\mathbb{R}^2,A=\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\},B=\{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\}$. נקבל ש- $span(A)=span(B)=V$, ולכן $span(A)\cap span(B)=V$. ואילו $A\cap B=\phi$ ולכן $span(A\cap B)=\{0\}\neq V$.

4. יהי V מ"ו, ויהיו $u=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\in V$ שני וקטורים. הוכח ש־u,v תלויים ליניארית אם ורק אם $ad-bc=0$.

פיתרון

$\Leftarrow$: נניח u,v תלויים ליניארית, אזי יש $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ כך ש- $\alpha_1v+\alpha_2u=0$. אם $\alpha_2=0$, נקבל $\alpha_1v=0$ ולכן $v=0$ וסיימנו. לכן נניח $\alpha_2\neq0$. נקבל את המערכת:

$$\begin{cases}a\alpha_1+c\alpha_2=0\\b\alpha_1+d\alpha_2=0\end{cases}$$

ומכאן ש־ $c=-\frac{\alpha 1}{\alpha 2}a, d=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}b$. נציב אותם:

$$ad-bc=a\cdot(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}b)-b\cdot(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}a)=0$$

$\Rightarrow$: נניח $ad-bc=0$. צריך למצוא צ"ל לא טריוויאלי של u,v שמאפס. אם $d\neq 0$ נבחר $\alpha_1=d,\alpha_2=-b$ ונקבל $\alpha_1\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ad-bc\\bd-bd\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

אחרת נקבל $bc=0$, ולכן $b=0\vee c=0$. אם $c=0$ אז $v=0$ ולכן הם ת"ל. אם $b=0$ אז הקואורדינטה השנייה בשני הוקטורים היא 0 ולכן הם פרופורציונאליים (אחד כפולה של השני) ולכן כמובן שהם ת"ל.

5. נתון תת המרחב הוקטורי הבא של $\mathbb{R}^4$:

$$U=span\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-2\end{pmatrix}\}$$

מצא מערכת מישוואות ליניארית (ניתן לייצגה גם ע"י מטריצה) שאוסף הפתרונות שלה הוא בדיוק U.

פיתרון

אנו רוצים לבדוק האם וקטור כללי $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in U$. זה קורה אם ורק אם למערכת המיוצגת ע"י $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\1&2&-2&b\\1&1&0&c\\1&2&-2&d\end{array}\right)$ יש פיתרון. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\1&2&-2&b\\1&1&0&c\\1&2&-2&d\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&1&-2&b-a\\0&0&0&c-a\\0&1&-2&d-a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&1&-2&b-a\\0&0&0&c-a\\0&0&0&d-b\end{array}\right)$$

למערכת יש פיתרון אם ורק אם מתקיים $a-c=0, b-d=0$. לכן התשובה היא:

$$U=\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4|\begin{cases}a-c=0\\b-d=0\end{cases}\}=\{x=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4|\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}x=0\}$$

6. האם הקבוצה $B=\{1+x^2+2x^3, 5+x+6x^2+13x^3, -3-x-3x^2-8x^3\}\subseteq\mathbb{R}_3[x]$ תלויה ליניארית? אם כן, מצא צ"ל לא טריוויאלי שנותן 0, אם לא הראה שהצ"ל היחיד שנותן 0 הוא הטריוויאלי.

פיתרון

כפי שראינו בתרגול, שמים את הוקטורים בעמודות מטריצה, ובודקים האם הפיתרון היחיד הוא הטריוויאלי. נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 13 & -8 \end{pmatrix}$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 13 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוקטורים תלויים ליניארית אם ורק אם למטריצה המדורגת יש פיתרון לא טריוויאלי. כאן מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים בת"ל.

הערה: שימו לב שלמערכת יש פיתרון לא טריוויאלי אם ורק אם יש משתנה חופשי. כאן אין משתנה חופשי, ולכן הוקטורים בת"ל.

7. נתבונן ב- $\mathbb{R}^{2\times 2} \supseteq \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\} = B$. האם $\begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \in span(B)$? אם כן, מצאו את הצירוף הליניארי המתאים.

פיתרון

נבדוק האם למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 39 \\ 4 & 1 & 4 & 18 \\ 5 & 1 & 5 & 23 \end{array}\right)$$

יש פיתרון. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 39 \\ 4 & 1 & 4 & 18 \\ 5 & 1 & 5 & 23 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פיתרון והוא הוקטור $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. כלומר:

$$2A_1 - 2A_2 + 3A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \in span(B)$$

8. א. יהי V מ"ו ותהא $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצה פורשת של V. הוכח או הפרך: $S' = \{v_1, v_2, v_1 + v_3\}$ גם קבוצה פורשת.
ב. יהי V מ"ו ותהא $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצה בת"ל. הוכח או הפרך: $S' = \{v_1 + 2v_2 - v_3, v_2 - v_3, v_1 + v_2\}$ גם בת"ל.

פיתרון

א. נכון. יהא $v \in V$ לפי נתון קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
כך ש $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v$

ולכן גם $(\alpha_1 - \alpha_3)v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3(v_1 + v_3)$ הוא צ"ל של איברי S' ששוה ל v.

ב. לא נכון. אפשר לראות ישירות כי:

$$w_1 = w_2 + w_3$$

ולכן עבור $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ נקבל $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = 0$, וזהו צ"ל לא טריוויאלי.