פרק I .   תורת המידה

יורם לינדנשטראוס, בנימין ווייס, אמנון פזי   "מבוא לאנליזה מודרנית"

A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin "Introductory Real Analysis"

סעיף 1. דיון כללי במושג המידה

נרצה מושג של מידה

בהנתן מרחב X, נרצה שהמידה תהיה מוגדרת על (חלק מ ה-) תת-קבוצות של X

נחזיק בראש את הדוגמה של הקטע[0,1] ,

איזה תכונות נרצה ממידה?

1. נתרכז במידות חיוביות $\mu(A)\geq 0$: (לכל קבוצה A עליה המידה מוגדרת)

2. אם $A\subseteq B$ והמידה מוגדרת עבור שתיהן אז $\mu(B)\geq \mu(A)$ (מונוטוניות)

3. נרצה שאם A ו B זרות , אז $\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (ובפרט אם μ מוגדרת על A ו B אז גם על $A\cup B$) (תכונה זו, יחד עם תכונה 1 גוררת את המונוטוניות)

4. נרצה שאוסף התת-קבוצות של X עליו מוגדרת המידה "עשיר" מספיק וסגור תחת פעולות מתמטיות מסוימות.

סעיף 2. חוגים ואלגברות של קבוצות

תהי X קבוצה. נסמן ב M(X) את אוסף כל תתי הקבוצות של X.

אנו נתעניין במשפחות של תתי קבוצות של X – כלומר $R\subseteq M(X)$.

<u>הגדרה 2.1</u> $R\subseteq M(X)$. לא ריקה נקראת **<u>אלגברה</u>** אם:

1. $X\in R$
2. אם $A\in R$ אז גם $A^c\in R$ (כאשר $A^c=X\backslash A$).
3. אם $A,B\in R$ אז גם $A\cap B\in R$.

<u>הערות:</u> 1. בגלל ש- $A\backslash B=A\cap B^c$ ו- $A\cup B=(A^c\cap B^c)^c$ אז גם $A\cup B\in R$, $A\backslash B\in R$.

2. כל איחוד וחיתוך סופי גם נשאר ב- R . (תרגיל)

3. הקבוצה הריקה - ϕ שייכת לכל אלגברה - , כי $X^c=\phi$.

4. אפשר באופן שקול לדרוש סגירות לאיחוד במקום לחיתוך בתכונה 3.

<u>דוגמאות:</u> (א) לכל קבוצה X האוסף M(X) של כל תת-הקבוצות הוא אלגברה

(ב) לכל קבוצה X האוסף $\{\phi, X\}$ הוא אלגברה.

(ג) המערכת של כל תת-הקבוצות הסופיות והקו-סופיות של X היא אלגברה.

מן ההגדרה נובע (תרגיל פשוט):

<u>משפט 2.4</u> – החיתוך של מספר כלשהו של אלגברות הוא אלגברה.

<u>משפט 2.5</u> – לכל אוסף לא ריק של קבוצות $\Sigma \subseteq M(X)$ קיימת אלגברה אחת ויחידה $R(\Sigma)$ המכילה את Σ ומוכלת בכל אלגברה R המכילה את Σ.

<u>הוכחה</u> – נוכיח את קיום האלגברה $R(\Sigma)$. תהי S משפחת כל האלגברות המוכלות ב- $M(X)$ ומכילות את Σ.

נגדיר $R(\Sigma) = \bigcap_{R \in S} R$. על פי משפט 2.4 זוהי אלגברה. אם $R^* \subset M(X)$ אלגברה ו- $\Sigma \subset R^*$, אז $R^* \in S$ ולכן

$R(\Sigma) = \bigcap_{R \in S} R \subset R \subset R^*$, (מינימאליות).

אלגברה זו נקראת <u>האלגברה המינימאלית</u> מעל Σ, <u>או האלגברה הנוצרת ע"י</u> Σ, ומסמנים אותה $R(\Sigma)$.

אחרי הוכחת הקיום היחידות ברורה. #

נגדיר מושג יותר כללי:

<u>הגדרה 2.6</u> – מערכת הקבוצות Σ נקראת <u>אלגברה למחצה</u> אם $\phi \in \Sigma$, סגורה לחיתוכים (לכל $A,B \in \Sigma$ $A \cap B \in \Sigma$) ולכל $A,B \in \Sigma$ ניתן להציג $A \Delta B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ כאשר A_k זרות בזוגות, $A_k \in \Sigma$.

דרישה זו שקולה לתכונה שאם $A \in \Sigma$, אז ניתן להציג $A^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ כאשר A_k זרות בזוגות, $A_k \in \Sigma$,

כל הצגה $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, כאשר A_k זרות בזוגות, תקרא <u>פירוק זר סופי</u> של A.

הערה : כל אלגברה היא גם אלגברה למחצה.(קל) הכוון ההפוך לא נכון:

<u>דוגמה</u> של אלגברה למחצה שהיא לא אלגברה: משפחת כל הקטעים $(a,b],[a,b],[a,b),(a,b)$ (וגם $\phi = (a,a)$, ו- $[a,a]$) על הציר הממשי.

<u>משפט 2.9</u> - א. אם Σ אלגברה למחצה, אז $R(\Sigma)$ מתלכדת עם אוסף הקבוצות B של האיחודים הסופיים של קבוצות מ Σ.

<u>ב</u>. $R(\Sigma)$ מתלכדת גם עם אוסף כל האחודים הסופיים הזרים של קבוצות מ Σ.

הוכחה א. – ברור כי כל אלגברה המכילה את Σ חייבת להכיל כל איחוד סופי של קבוצות מ Σ. (למה?)

לכן די להראות כי המערכת B היא אלגברה.

1. קל לראות ש $X \in B$.
2. נראה סגירות תחת משלים: כלומר נניח $A \in B$ ונראה ש $A^c \in B$

ולכן $A \in B$ $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ כאשר $A_i \in \Sigma$. מכוון ש Σ אלגברה למחצה ניתן להרחיב כל A_i לחלוקה סופית של X- $X = A_i \uplus \bigcup_{k=1}^{m_i} C_{i,k}$ כאשר האחוד הוא אחוד זר.

לא קשה לבדוק ש - $A^c = \bigcup_{(i,k)\neq(j,l)} (C_{i,k} \cap C_{j,l})$ וזהו אחוד סופי של אברים מ Σ

3. סגירות תחת איחודים היא מיידית.

#

ב. כעת נותר להראות שכל אחוד סופי של אברים מ Σ ניתן לכתוב כאחוד סופי זר של אברים מ Σ.

ההוכחה תהיה באינדוקציה על מספר האברים באחוד הסופי

עבור קבוצה אחת זה ברור

נניח שנכון עבור אחוד של עד n קבוצות מ Σ, נראה עבור אחוד של n+1.

נניח ש - $C = A \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. אז את $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ניתן לפי הנחת האינדוקציה לכתוב כאחוד זר של קבוצות מ Σ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} D_j$ כאשר D_j זרות בזוגות.

כעת נשלים את A לחלוקה של המרחב $X = A \uplus \bigcup_{k=1}^{l} C_k$ ואז $C = A \uplus \bigcup_{k,j} (C_k \cap D_j)$. וזהו אחוד זר של קבוצות מ Σ. (זוהי הוכחה מעט שונה ממה שעשינו בשעור, יש הרבה דרכים שקולות להראות זאת)

#

בנוסף לעובדות לעיל חשובים גם איחודים וגם חיתוכים לא רק סופיים אלא כאלה הניתנים למניה,

בשביל זה צריכים עוד מושגים.

הגדרה 2.10 – אלגברה A נקראת σ-אלגברה אם היא סגורה תחת איחודים בני מניה – כלומר לכל סדרת קבוצות $\{A_n\}$ שכל אבריה שייכים ל A גם האיחוד $S = \bigcup_n A_n$ שייך ל A.

הערה 2.11 – אלגברה $A \subset M(X)$ סגורה לאיחודים בני מניה אם"ם היא סגורה תחת חיתוכים בני מניה:

$$\bigcup_n A_n = X \setminus \bigcap_n (X \setminus A_n) \ , \bigcap_n A_n = X \setminus \bigcup_n (X \setminus A_n)$$

הדוגמה הכי פשוטה של אלגברת-σ היא משפחת כל תת-הקבוצות של קבוצה A איזושהי.

אם נתון אוסף קבוצות $\Sigma \subset M(X)$ כלשהי תמיד קיימת אלגברת-σ לפחות אחת המכילה את Σ -$M(X)$.

(ובאופן יותר כללי ניתן לקחת $X = \bigcup_{A\in\Sigma} A$)

אם $\tilde{B}$ היא σ-אלגברה שרירותית המכילה את Σ, ו- $\tilde{X}$ יחידה שלה, אז לכל $A \in \Sigma$ מתקיים גם $A \in \tilde{X}$ לכן

$$X = \bigcup_{A\in\Sigma} A \subset \tilde{X}$$

.

ל σ-אלגבראות קיים משפט דומה למשפט 2.5 לחוגים.

משפט 2.12 – לכל מערכת הקבוצות Σ לא ריקה קיימת σ-אלגברה $B(\Sigma)$ המכילה את Σ ומוכלת בכל σ-אלגברה המכילה את Σ.

ההוכחה היא בדיוק אותה הוכחה של המשפט 2.5.

אלגברת-σ $B(\Sigma)$ נקראת אלגברת-σ מינימאלית (מעל המערכת Σ), או ה σ-אלגברה הנוצרת מ Σ.

דוגמה עיקרית: באנליזה חשובות קבוצות של בורל (Borel): קבוצות על הציר הממשי שייכות לאלגברת-σ מינימאלית מעל מערכת כל הקטעים $[a,b]$.