בוחן תשע"ו - אלגברה מופשטת 1

14 בדצמבר 2015

גרסה 2

יש לכתוב שם מלא, תעודת זהות, שם המרצה אליו אתם רושמים וקבוצת התרגול אליה אתם רוצים שיחזור הבוחן.

ענו על שאלה 1 (20 נק') ועל שתי שאלות מתוך שאלות 2,3,4 (40 נק' כל אחת).

1. כיתבו במחברת את התשובה הנכונה עבור חבורות G ו H מסדר n זוגי:

(א) לכל k טבעי המחלק את n קיים איבר מסדר k בחבורות.

(ב) קיים $k \neq 1$ טבעי כך שישנם איברים $x \in G$ ו $y \in H$ כך ש $o(x) = o(y) = k$.

(ג) אם G ו H אבליות, אז הן איזומורפיות.

(ד) אם G ו H לא אבליות, אז הן איזומורפיות.

פתרון: התשובה היא (1ב). ידוע שלכל חבורה מסדר זוגי יש איבר מסדר 2. לכן אנחנו יכולים לקחת $k = 2$. ודאו שאתם מכירים הפרכות לסעיפים האחרים.

2. (א) האם החבורה $\mathbb{Z}_4 \times U_{14}$ היא צקלית? אם כן מצאו יוצר, אם לא הסבירו מדוע.

(ב) תהי G חבורה סופית. הוכיחו או הפריכו: לכל שני איברים $a, b \in G$ מתקיים $o(ab) = \operatorname{lcm}(o(a), o(b))$.

פתרון:

(א) הסדר של U_{14} הוא 6, ולכן $|\mathbb{Z}_4 \times U_{14}| = 24$. כלומר, החבורה ציקלית אמ"ם קיים איבר מסדר 24. אבל לכל $(a, b) \in \mathbb{Z}_4 \times U_{14}$ ידוע ש$o(a, b) = lcm\{o(a), o(b)\}$. לפי משפט לגרנז', $o(a)|4, o(b)|6$ ולכן $o((a, b))|12$. כלומר, לא קיים איבר מסדר 24.

(ב) הפרכה: נקח $e \neq a \in G$ ו $b = a^{-1}$. הוכחנו בתרגול ש $o(a) = o(b)$ ולכן $lcm(o(a), o(b)) = o(a) \neq 1$ אולם $o(ab) = 0(1) = 1$.

3. (א) הוכיחו שהקבוצה $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ היא חבורה ביחס לכפל מטריצות.

(ב) מצאו את המרכז $Z(H)$.

(ג) מצאו תת חבורה לא טריוויאלית $K \leq H$ כך ש $Z(H) \nsubseteq K$.

פתרון:

(א) צ"ל: קיום איבר יחידה, סגירות לכפל וקיום הופכי.

איבר יחידה: עבור $a=b=c=0$ נקבל את מטריצת היחידה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

סגירות לכפל: לכל זוג איברים ב־H מתקיים

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & (x+a) \mod 5 & (y+az+b) \mod 5 \\ 0 & 1 & (c+z) \mod 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אכן איבר בH.

הופכי: נשים לב שלכל איבר ב־H ההופכי הוא

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 5-a & (ac-b) \mod 5 \\ 0 & 1 & 5-c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ההופכי הוא בעצמו איבר בH וניתן להכפיל ולראות שזה אכן יוצא מטריצת היחידה.

(ב) מחפשים מטריצה $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ כך שלכל $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מתקיים

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. אם נשווה רכיב־ רכיב נקבל את המשוואה הלא טריוויאלית היחידה: $y+az+b=b+xc+y$ כלומר $az=xc$. כמובן שאם $a=c=0$ המשוואה מתקיימת. כמו כן, אם נציב $x=1, z=0$ נקבל $c=0$, ואם נציב $x=0, z=1$ נקבל $a=0$. לכן המרכז שווה בדיוק לכל המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b\in\mathbb{Z}_5$.

(ג) נקח את K להיות התת חבורה שנוצרת ע"י $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. היא מסדר 5, כמו המרכז, ולכן מכיוון שקל לראות שהן לא שוות, נקבל $z(H)\nsubseteq K$.

4. תהי G חבורה ו $a\in G$ איבר. הגדרנו את המרכז של a: $C_G(a)=\{x\in G \mid ax=xa\}$.

(א) הוכיחו ש$C_G(a)$ היא תת־חבורה של G.

(ב) הוכיחו כי $\langle a\rangle \lhd C_G(a)$.

(ג) חשבו את $C_{S_5}((125))$.

פתרון:

(א) צ"ל סגירות לכפל וסגירות להופכי.
יהי $x \in C_G(a)$. כלומר, $xa = ax$. ע"י הכפלת משני הצדדים ב x^{-1} נקבל $ax^{-1} = x^{-1}a$. כלומר, $x^{-1} \in C_G(a)$.
יהיו $x, y \in C_G(a)$. $xya = xay = axy$ ולכן $xy \in C_G(a)$.

(ב) יהי $x \in C_G(a)$. צ"ל $x\langle a\rangle x^{-1} \in \langle a\rangle$. כלומר, צ"ל שלכל $i \in \mathbb{N}$, $xa^ix^{-1} = x^j$ לאיזשהו $j \in \mathbb{N}$. אנחנו נראה שלמעשה $xa^ix^{-1} = a^i$. זה שקול לכך ש $xa^i = a^ix$.
נוכיח באינדוקציה. עבור $i = 1$ זה נתון. נניח נכונות לi ונוכיח ל$i + 1$. ובכן, $a^{i+1}x = a^iax = a^ixa = xa^ia = xa^{i+1}$. מש"ל.

(ג) $\{(3,4),(1,2,5),(1,2,5)(3,4),(1,5,2),(1,5,2)(3,4)\}$