פתרון תרגיל 4 – מבוא לאנליזה 1

.1

(א) **הוכחה:** נניח בשלילה שהסדרה $\{a_n+b_n\}$ מתכנסת לגבול L (לאו דווקא סופי, כלומר ייתכן ש־$L=\infty$ או $L=-\infty$). נתון כי $\{a_n\}$ מתכנסת לגבול **סופי** A. לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n-a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) - \lim_{n\to\infty} a_n = L-A$$

ונקבל שאם L סופי אז $b_n \to L-A \in \mathbb{R}$, אם $L=\infty$ אז $b_n\to\infty$, ואם $L=-\infty$ אז $b_n\to-\infty$, ובכל מקרה $\{b_n\}$ מתכנסת (במובן הרחב). אבל זאת **סתירה** לנתון ש־$\{b_n\}$ מתבדרת.

(ב) ייתכן ש־$\{a_n\}$ מתכנסת לגבול סופי, $\{b_n\}$ מתבדרת, אבל $\{a_n\cdot b_n\}$ מתכנסת:
למשל עבור הסדרה הקבועה $a_n=0$ והסדרה המתבדרת $b_n=(-1)^n$, מתקיים $a_n\cdot b_n=0$ ולכן $\{a_n\cdot b_n\}$ מתכנסת ל־0.

הערה: בדוגמא שנתנו $a_n\to 0$. אילו היה נתון בנוסף שהגבול של $\{a_n\}$ (נסמנו A) **שונה מ־0**, אז הסדרה $\{a_n\cdot b_n\}$ הייתה מתבדרת:
אילו הייתה מתכנסת (במובן הרחב) לגבול L, היה אפשר להשתמש בכלל האריתמטיקה למנה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot b_n}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{L}{A}$$

(שימו לב שזה חוקי כי הגבול במכנה סופי ושונה מ־0). כעת כמו בסעיף הקודם, אם L סופי אז $b_n\to\frac{L}{A}\in\mathbb{R}$, אם $L=\infty$ אז $b_n\to\infty$ אם $A>0$ ו־$b_n\to-\infty$ אם $A<0$, ואם $L=-\infty$ אז $b_n\to-\infty$ אם $A>0$ ו־$b_n\to\infty$ אם $A<0$. בכל מקרה נקבל ש־$\{b_n\}$ מתכנסת (במובן הרחב), ונקבל סתירה לנתון ש־$\{b_n\}$ מתבדרת.

.2

(א) צ"ל: לכל n טבעי מתקיים

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

הוכחה באינדוקציה: עבור $n=1$: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$ – מתקיים.

נניח שהטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו, ז"א:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

צ"ל שהיא נכונה גם עבור $n+1$, כלומר:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

אכן, לפי הנחת האינדוקציה,

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$

$$=\underbrace{\frac{n}{n+1}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\boldsymbol{\frac{n+1}{n+2}}$$

כדרוש.

(ב) צ"ל: לכל n טבעי מתקיים

$$\frac{1}{2n}\leq\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

הוכחה באינדוקציה: עבור $n=1$: אכן, $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2\cdot 1}$.

נניח שהטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו:

$$\frac{1}{2n}\leq\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

צ"ל שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר:

$$\frac{1}{2n+2}\leq\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+2)}$$

אכן, לפי ההנחה:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+2)}=\underbrace{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\geq$$

$$\geq\underbrace{\frac{1}{2n}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}=\underbrace{\frac{2n+1}{2n}}_{\geq 1}\cdot\frac{1}{2n+2}\geq\frac{1}{2n+2}$$

וסיימנו.

3. (א) הסדרה $\{a_n\}$ נתונה ע"י

$$\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{4}\\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot a_n^2\end{cases}$$

נוכיח באינדוקציה כי לכל $n\in\mathbb{N}$: $\boldsymbol{0<a_n<1}$.

עבור $n=1$: $a_1=\dfrac{1}{4}$, מתקיים. נניח שעבור n טבעי כלשהו $0<a_n<1$ ונוכיח כי $0<a_{n+1}<1$.
לפי נוסחת הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot a_n^2$. מהנחת האינדוקציה: $0<a_n^2<1^2 \Leftarrow 0<\frac{1}{2}\cdot a_n^2<\frac{1}{2}$. בפרט, $0<\frac{1}{2}\cdot a_n^2<1$ כלומר $0<a_{n+1}<1$, כדרוש.

(ב) נוכיח כי הסדרה $\{a_n\}$ **מונוטונית יורדת:**
לכל n טבעי $0 < a_n < 1$ ו־ $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n^2$, ולכן:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot a_n < \frac{1}{2} < 1 \;\Rightarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a_{n+1} < a_n}$$

כלומר הסדרה מונוטונית יורדת.

(ג) מהסעיפים הקודמים $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת וחסומה מלרע, לכן לפי משפט היא מתכנסת לגבול סופי.
לפי נוסחת הנסיגה ואריתמטיקה של גבולות:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot a_n^2 = \frac{1}{2}L^2$$

לכן $\frac{1}{2}L^2 = L \Leftarrow L^2 = 2L \Leftarrow L = 0$ או $L = 2$. אבל $0 < a_n < 1$ לכל n ולכן $0 \le L \le 1$, ונקבל ש־$\boldsymbol{L = 0}$.

4. (א) הסדרה $\{a_n\}$ נתונה ע"י

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

נוכיח באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{0 \le a_n < 2}$.
עבור $n = 1$: $a_1 = 0$, מתקיים. נניח שעבור n טבעי כלשהו $0 \le a_n < 2$ ונוכיח כי $0 \le a_{n+1} < 2$.
לפי הנחת האינדוקציה: $2 \le 2 + a_n < 4$, לכן $\sqrt{2} \le \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4}$, ז"א $\sqrt{2} \le a_{n+1} < 2$, ובפרט $0 \le a_{n+1} < 2$, כדרוש.

(ב) נוכיח כי הסדרה $\{a_n\}$ **מונוטונית עולה**: לכל n טבעי,

$$0 \le a_n < 2 \;\Rightarrow\; \underbrace{(a_n - 2)}_{<0}\underbrace{(a_n + 1)}_{>0} < 0 \;\Rightarrow\; a_n^2 - a_n - 2 < 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_n^2 < 2 + a_n \;\Rightarrow\; a_n < \sqrt{2 + a_n} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a_n < a_{n+1}}$$

(ג) מהסעיפים הקודמים $\{a_n\}$ מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, לכן לפי משפט מתכנסת לגבול סופי L.
לפי החסמים שמצאנו: $0 \le L \le 2$. מנוסחת הנסיגה ואריתמטיקה של גבולות:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + L}$$

לכן $L = \sqrt{2 + L} \Leftarrow L^2 - L - 2 = 0 \Leftarrow (L - 2)(L + 1) = 0 \Leftarrow L = 2$ או $L = -1$, וכיוון ש־$L \ge 0$ נקבל $\boldsymbol{L = 2}$.