

תשובות לתרגיל 6 מתמטיקאים

שאלה 1

1. היות ו $2 \ln x \leq \ln^2 x$ (החל מנקודה כלשהיא) אז

$$e^{-\ln x^2} \leq e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$$

היות ו $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס, אז גם האינטגרל שלנו מתכנס.

2. נפצל את האינטגרל (נראה עוד שניה למה)

$$\int_0^\infty x^2 \sin x^4 dx = \int_0^1 x^2 \sin x^4 dx + \int_1^\infty x^2 \sin x^4 dx$$

האינטגרל הראשון הוא אינטגרל רגיל והוא קיים. בשביל האינטגרל השני נציב $t = x^4$ כלומר $dt = 4x^3 dx$ ולכן

$$\int_1^\infty x^2 \sin x^4 dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{x} dt = \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt[4]{t}} dt$$

(פיצלנו בהתחלה את התחום כדי שכאן לא נגיע לאינטגרל לא אמיתי (גם) מסוג שני). האינטגרל שהתקבל מתכנס לפי דיריכלה.

3. מתכנס לפי דיריכלה.

4. נשים לב ש

$$\frac{\cos^2(x)}{x} \leq \frac{|\cos x|}{x}$$

והיות שבסעיף הבא נראה שיש התבדרות גם האינטגרל שלנו מתבדר לפי מבחן השוואה.

5.

$$\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{2 \cos(x)}{x} dx$$

האינטגרל הימני מתכנס לפי דיריכלה והאינטגרל השמאלי מתבדר לכן בסך הכל האינטגרל מתבדר.

6.

$$\int_1^\infty \frac{x - \arctan x}{x(1+x^2) \arctan x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2) \arctan x} dx - \int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

את האינטגרל השמאלי פותרים עם הצבה $t = \arctan x$ ואז

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x^2) \arctan x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt$$

שזה מתכנס. והאינטגרל הימני

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

גם מתכנס לפי מבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{x^3}$ ולכן בסך הכל האינטגרל מתכנס.

שאלה 2

אם $\alpha \leq 1$ נשים לב ש

$$\frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$$

היות ו $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}$ מתבדר (זה כמו בשאלה 1 סעיף 5) ברור שגם האינטגרל שלנו מתבדר. לעמות זאת אם $\alpha > 1$ אז היות ו

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} - \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha}$$

שהאינטגרל הימני מתכנס לפי דיריכלה וגם האינטגרל השמאלי מתכנס ולכן האינטגרל הכולל גם מתכנס.

שאלה 3

סעיף א

אם f לא מתכנסת בכלל, אז בגלל שהיא יורדת יש שלב שבו היא יותר קטנה מ -1 . בגלל שבשלב הזה f היא שלילית ו -1 כמובן שלילי אפשר להשתמש במבחן ההשוואה ולומר ש

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \text{ לא מתכנס כי } \int_0^{\infty} -1 dx \text{ לא מתכנס.}$$

לכן בהכרח f מתכנסת כלומר

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

נניח ש $a \neq 0$. אם $a > 0$ אז בוודאי ש $f(x) > 0$ ואם $a < 0$ אז יש שלב שבו f היא שלילית ולכן אפשר להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{a} = 1$$

ולומר ש $\int_0^{\infty} f(x)dx$ לא מתכנס. סתירה.
 לכן בהכרח

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

סעיף ב

למשל הפונקציה משאלה 1 סעיף ב.

שאלה 4

סעיף א

נציב $z = \int_0^x f(t)dt$ ואז $dz = f(x)dx$ כלומר

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt} dx = \int_a^{\infty} \frac{1}{z} dz = \infty$$

כאשר $a = \int_0^1 f(t)dt$ נשים לב שהשתמשנו בנתון $\int_0^{\infty} f(t)dt = \infty$ כדי לקבוע את הגבול העליון של האינטגרל אחרי הצבה.

סעיף ב

נבחר

$$f(x) = e^{-x}$$

ואז לפי השיקול בסעיף א נקבל

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt} dx = \int_a^b \frac{1}{z} dz < \infty$$

$$.b = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \text{ ו } a = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$$

שאלה 5

סעיף א

בכל תת קטע מן הצורה $[1, a]$ יש לפונקציה מספר סופי של נקודות אי רציפות ולכן היא אינטגרבילית.

סעיף ב

$$x - 1 \leq [x]$$

ולכן

$$\frac{1}{1 + [x]^2} \leq \frac{1}{1 + (x - 1)^2}$$

לפי מבחן ההשוואה האינטגרל מתכנס.