אינפי 4 תרגול 4

22 באפריל 2015

הגדרה:

תחום Ω במישור נקרא תחום גרין אם שפתו, $\partial\Omega$, מורכבת מאיחוד סופי של מסילות פשוטות וסגורות.

אפשר להכליל את משפט גרין לתחום גרין, כלומר בתנאי משפט גרין, אם התחום Ω הוא תחום גרין אזי:

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{\partial\Omega}Pdx+Qdy$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C xe^{-2x}dx+(x^4+2x^2y^2)dy$ כאשר C היא שפת התחום הכלוא בין שני המעגלים $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$ כאשר לאורך כל אחד מהם מתקדמים בכיוון החיובי.

*הכיוון החיובי הוא הכיוון בו התחום נמצא משמאלנו לאורך התנועה.

<u>פתרון:</u>

התחום D שלנו הוא תחום גרין, ולכן נוכל להשתמש במשפט גרין.

השדה הוקטורי שלנו הוא:

$$(P,Q)=(xe^{-2x},x^4+2x^2y^2)$$

ולכן:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=4x^3+4xy^2-0=4x(x^2+y^2)$$

ואם כן, לפי משפט גרין נקבל:

$$\int\limits_{C}xe^{-2x}dx+(x^4+2x^2y^2)dy=\iint\limits_{D}4x(x^2+y^2)dxdy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

הזווית היא בין 0 לבין 2π. התחום שלנו הוא בין מעגל שרדיוסו 1 לבין מעגל שרדיוסו 2 ולכן $1 \le r \le 2$. בל נשכח את היעקוביאן r, ובסך הכל:

$$\iint\limits_D 4x(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^2 4r\cos\theta\cdot r^2\cdot rdrd\theta = 4\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\cdot\int\limits_1^2 r^4dr$$

והתשובה היא 0.

משטחים:

ראשית, נגדיר **הומיאומורפיזם** - פונקציה f נקראת הומיאומורפיזם אם היא חח"ע ועל, רציפה וגם ההופכית שלה רציפה.

שימו לב שאם f הומיאומורפיזם, מן הסתם גם f^{-1} הומיאומורפיזם.

אינטואיטיבית, הומיאומורפיזם היא פונקציה שרק מקמטת/מעוותת את המרחב באופן רציף, בלי לקרוע אותו או לעשות בו חורים (זה אולי מעט לא מובן, אך זה לא מעניין הקורס ולכן לא נתעכב על כך).

משפט:

יהיו $M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in M$, $1 \le k < n$ ו־$p \in \mathbb{N}$. התכונות הבאות שקולות:

1. קיימת סביבה U_a של הנקודה a וקיימת $g : U_a \to \mathbb{R}^{n-k}$ כזאת ש־$g \in C^p(U_a)$, $rankJ_g(x) = n-k$ לכל $x \in U_a$ ובנוסף: $M \cap U_a = \{x \in U_a | g(x) = 0\}$.
2. קיימת סביבה של a ב־M, $M \cap V_a$, כזאת שהיא הגרף של הפונקציה $f : W \to \mathbb{R}^{n-k}$, כאשר $W \subset \mathbb{R}^k$ ו־$f \in C^p(W)$. כלומר:

$$M \cap V_a = \{(w, f(w)) | w \in W\}$$

3. קיימות סביבה של a ב־M, $M \cap G_a$, קבוצה פתוחה $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ והומיאומורפיזם $F : \Omega \to M \cap G_a$ כזה ש־$F \in C^p(\Omega)$ ובנוסף: $rankJ_F(x) = k$ לכל $x \in \Omega$.

הגדרה:

אם $a \in M \subset \mathbb{R}^n$ מקיימת את אחת מהתכונות הנ"ל, נאמר ש־M משטח k מימדי בסביבת הנקודה a השייך ל־C^p.

אם לכל נקודה $a \in M$ הקבוצה M היא משטח k מימדי השייך ל־C^p, נאמר ש־M הוא משטח k מימדי השייך ל־C^p.

הגדרות מרגשות:

בהמשך לתכונה 3 במשפט, נגדיר:

1. הזוג (F, Ω) נקרא מפה מקומית של $M \cap G_a$.
2. אוסף של מפות (F_α, U_α) עבורו $M = \bigcup\limits_\alpha F_\alpha(\Omega_\alpha)$ נקרא אטלס.

התכונות נראות מסובכות. נעסוק כעת רק במשטחים דו מימדיים במרחב $\mathbb{R}^3$.

אינטואיטיבית, משטח כזה אפשר להציג בשתי דרכים עיקריות (נסו להבין לאיזו תכונה כל דרך מתאימה):

1. משוואה (בנעלמים x, y, z), למשל:

א. המישור $z = 6$.

ב. הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

ג. החרוט $x^2 + y^2 = (z-1)^2$.

2. פרמטריזציה מהצורה:

$$\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$$

כאשר כל אחת מהפונקציות ϕ_i היא כמובן פונקציה סקלרית. נמצא פרמטריזציות של המשטחים שהבאנו כדוגמאות:

א. פרמטריזציה של המישור $z = 6$ תהיה:

$$\phi(u, v) = (u, v, 6)$$

כאשר $u, v \in \mathbb{R}$.

ב. בגליל שלנו, x, y יוצרים ביניהם מעגל שרדיוסו 1, ו-z לא מוגבל כלל. אם כן, פרמטריזציה של הגליל תהיה:

$$\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

כאשר $u \in [0, 2\pi]$ ו-$v \in \mathbb{R}$.

ג. בחרוט, x, y יוצרים מעגל, אך הפעם הרדיוס שלו תלוי ב-z. כאשר $z = 1$, הרדיוס הוא 0, כלומר יש רק זוג אחד של x, y שנמצא על המשטח עבור $z = 1$:

$$(x, y, z) = (0, 0, 1)$$

זהו בעצם הקודקוד של החרוט. ככל ש-z מתרחק מ-1, המעגל גדל (בין אם הוא גדול ממנו ובין אם הוא קטן ממנו; רדיוס כמובן צריך להיות אי־שלילי, אך מכיוון שהרדיוס כאן מתואר ע"י $(z-1)^2$, $z - 1$ עצמו יכול להיות גם חיובי וגם שלילי. במילים אחרות, המשטח שלנו הוא בעצם שני חרוטים, שנושקים זה לזה בנקודה $(0, 0, 1)$).

אם כן, הפרמטריזציה שלנו צריכה לתאר מעגל ש-x, y עושים ורדיוסו תלוי במשתנה השלישי, z. כמו כן, כאשר $z = 1$ שני האחרים צריכים להתאפס.

לכן, פרמטריזציה מתאימה לחרוט היא:

$$\phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u+1)$$

כאשר $v \in [0,2\pi]$, $u \in \mathbb{R}$.

כדאי לראות איך החרוט נראה בעזרת $wolframalpha$, או בעזרת $matlab$ אם אתם ממש חיים על הקצה.

אפשר גם לשחק מעט עם הקבועים או עם הסימנים ולראות איך המשטח משתנה, אין ספק שזה עוזר לתפוס את הנושא.

אפשר גם "ללכת הפוך", כלומר למצוא משוואה למשטח שנתון ע"י פרמטריזציה.

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן במשטח שנתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\phi(u,v) = (u-v, u+v, uv)$$

נרצה למצוא את המשטח שלנו בצורת משוואה.

לשון אחר, נרצה להביע אחד מהמשתנים $x = u-v, y = u+v, z = uv$ באמצעות השניים האחרים.

קל לראות שמתקיים:

$$y^2 - x^2 = (u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv = 4z$$

ולכן משוואה שתתאר את המישור היא למשל המשוואה:

$$z = \frac{y^2 - x^2}{4}$$

זהו פרבולואיד היפרבולי (בדקו איך הוא נראה בוולפרם!).

<u>הערות:</u>

1. כאשר משטח ניתן ע"י משוואה, נאמר שהוא ניתן להטלה למישור של שני המשתנים החופשיים.

למשל, הפרבולואיד ההיפרבולי מהדוגמה הקודמת הוא משטח שניתן להטלה למישור xy.

2. כאשר משטח נתון ע"י פרמטריזציה $\phi(u,v)$, הוקטורים המשיקים למשטח בנקודה a הם $\phi_u(a), \phi_v(a)$.

מרחב משיק:

הגדרה:

יהיו $M \subset \mathbb{R}^n$ משטח k מימדי מ$-C^1$ ותהי $x \in M$. וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ נקרא וקטור משיק למשטח M בנקודה x אם קיימות עקומה $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ונקודה $t_0 \in I$ כך ש$-\gamma(t) \in M$ לכל $t \in I$, $\gamma(t_0) = x$ ו$-\gamma'(t_0)$.

אוסף כל הוקטורים המשיקים ל$-M$ בנקודה x נקרא המרחב המשיק ל$-M$ בנקודה x ונסמנו ב$-T_x(M)$.

המרחב המשיק למשטח דו מימדי ב$-\mathbb{R}^3$ הוא מישור משיק (נגענו במישורים משיקים באינפי 3).

<u>תרגיל:</u>

מצאו את המישור המשיק לגליל $M : \{(x, y, z)|x^2+y^2 = 1\}$ בנקודה $p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$.

<u>פתרון:</u>

הפרמטריזציה שלנו היא:

$$\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

כאשר $v \in \mathbb{R}, u \in [0, 2\pi]$.

לכן, הוקטורים המשיקים הם וקטורי הנגזרות:

$$\phi_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\phi_v(u, v) = (0, 0, 1)$$

כעת, נותר למצוא את הנקודה (u, v) עבורה $\phi(u, v) = p$.

קל לראות שמדובר על הנקודה $(u, v) = (\frac{\pi}{4}, 3)$. לכן, הוקטורים המשיקים בנקודה p הם:

$$\phi_u(\frac{\pi}{4}, 3) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$\phi_v(\frac{\pi}{4}, 3) = (0, 0, 1)$$

ולכן המישור המשיק יהיה:

$$T_p(M) = span\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1)\} = \{(-a, a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$$

*אם $M \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, אז $T_x(M) = \mathbb{R}^n$ לכל $x \in M$.