98

יפה מאוד!

בדידה - תרגיל 4

212073928

1) $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$ 2

הוכחה

נוכיח $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

יהי $a \in (A\cap B)^c$

$\Updownarrow$

$a \notin A\cap B$

$\Updownarrow$

$a\notin A \vee a \notin B$

$\Updownarrow$

$a \in A^c \vee a \in B$

$\Updownarrow$

$a \in A^c \cup B^c$

לפי השקילות אם ורק אם ולכן אם $a\in(A\cap B)^c$ אזי $a \in A^c\cup B^c$ ולהפך ולכן הוכחנו

מש"ל

② (1) $A \subseteq B \Rightarrow A^c \supseteq B^c$

<u>הוכחה</u>

אם $A \subseteq B$, אז $A^c = B^c \cup (B \setminus A)$

למה?

לכן $B^c \subseteq A^c$ $\blacksquare$

-2

---

② (2) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

<u>הפרכה</u>

$A = \{1\}, \; B = \{2\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$

$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$

---

② (3) $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\} \iff A \cap B = \emptyset$

<u>הוכחה</u>

$A \cap B = \emptyset$

$\Updownarrow$

$\forall a \in A : a \notin B$

$\Updownarrow$

$\forall C \subseteq A \land C \neq \emptyset : C \not\subseteq B$

$\Updownarrow$

$P(A) \cap P(B) = \emptyset$

1 (4)

$$A \subseteq P(A) \Rightarrow A \cap P(A) \neq \phi$$

הפרכה

$A = \{\phi\}$

$P(A) = \{\phi, \{\phi\}\}$

$A \subseteq P(A)$

$A \cap P(A) = \{\phi\} \neq \phi$

כי ϕ משותף ל- $P(A)$ ו- A.

---

2 (5)

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

הוכחה

$a \in P(A) \cap P(B)$

$\Updownarrow$

$a \in P(A) \wedge a \in P(B)$

$\Updownarrow$

$a \subseteq A \wedge a \subseteq B$

$\Updownarrow$

$a \subseteq A \cap B$

$\Updownarrow$

$a \in P(A \cap B)$

$\blacksquare$

$$X = \{ X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_m \mid \forall\, 1 \le i \le m \ (X_i = A_i) \vee (X_i = U \setminus A_i) \}$$

$U \setminus A_i = A^c$

יהי $B_1, B_2 \in X$, (נניח $B_1 \neq B_2$) קיימות 2^m קבוצות כאלה

אם $B_1 \neq B_2$ אזי

$B_1 = X_1 \cap \dots \cap X_m$

$B_2 = X_1' \cap \dots \cap X_m'$

$B_1 \neq B_2$

$\Downarrow$

קיים

$\exists_{1 \le i \le m} \ X_i \neq X_i'$

אם יש שתי אפשרויות, $X_i = A_i$

או

$X_i = A_i^c$

בלי הגבלת הכלליות: $X_i = A_i$

$X_i' = A_i^c$

ולכן $X_i \cap X_i' = \emptyset$

אם B_1 ו- B_2 ... $B_1 = X_1 \cap \dots \cap X_m$

$B_2 = X_1' \cap \dots \cap X_m'$

בנוסף ש יש לציין ש i אחד רק ש $X_i \cap X_i' = \emptyset$

אזי

$$B_1 \cap B_2 = X_1 \cap \dots \cap X_i \cap \dots X_m \cap X_1' \cap \dots \cap X_i' \cap \dots \cap X_m' = X_1 \cap \dots \cap X_m \cap X_1' \cap \dots X_m' \cap X_i \cap X_i' =$$

$$= X_1 \cap \dots \cap X_m \cap X_1' \cap \dots \cap X_m' \cap \emptyset = \emptyset$$

במקרה b $A_i = A_j^c$ סדר איפשהו י, ו

עד ודאי x_i'' x_j''

ט, B_1 (בלי הגבלת הכלליות) $= \emptyset$

ואז $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

וגם לאזן!

המקרה הזה מוכל בתוך המקרה הקודם

---

(3)

צ"ל $24 | n^3 - 25n$

בסיס האינדוקציה:

$24 | (1-25)$

$24 | -24$ ✓

הנחת האינדוקציה: $24 | (n^3 - 25n)$, n אי זוגי

צ"ל

מכוון $24 | (n+2)^3 - 25(n+2)$

$$\left[(n+2)^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8\right]$$

$$(n+2)^3 - 25(n+2) =$$

$$= n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - 25n - 50 = (n^3 - 25n) + 6n^2 + 12n + 8 - 50 =$$

$$= (n^3 - 25n) + 6n^2 + 12n - 42 = (n^3 - 25n) + 6n^2 + 12n + 6 - 48 =$$

$$= \underbrace{(n^3 - 25n)}_{\text{מתחלק ב 24}} + \underbrace{6(n+1)^2}_{?} \underbrace{- 48}_{\text{מתחלק ב 24}}$$

(מסוחות היא) בסוף בגלל

המשך

אם, כך לכל n אי זוגי. $6(n+1)^2$ מתחלק ב 24...

צ"ל כי לכל n אי זוגי, $(n+1)^2$ מתחלק ב-4.

נוכיח באינדוקציה.

בסיס: $(1+1)^2=2^2=4$

$\frac{4}{4}=1$

הנחה

$4|(n+1)^2$ לכל n אי זוגי

צ"ל

$4|(n+3)^2$

$(n+3)^2=n^2+6n+9=n^2+2n+1+4n+8=$

$=\underbrace{(n+1)^2}_{\text{מתחלק ב-4}}+\underbrace{4(n+2)}_{\text{מתחלק ב-4}}$

מההנחה!

אז $4|(n+3)^2$

ולכן

$24|(n^3-25n)$ לכל n אי זוגי

■

4

<u>הוכחה</u>
אינדוקציה

בסיס: עבור 2

$$(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$$

הנחה:

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup \dots \cup A_n^c$$

צ"ל

$$(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1})^c = A_1^c \cup \dots \cup A_{n+1}^c$$

$$\boxed{(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1})^c} = ((A_1 \cap \dots \cap A_n) \cap A_{n+1})^c =$$

$$\underset{\text{כלל דמורגן 2 קבוצות}}{=} (A_1 \cap \dots \cap A_n)^c \cup (A_{n+1})^c \underset{\text{לפי הנחה}}{=} (A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c) \cup (A_{n+1})^c$$

$$= \boxed{A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_{n+1}^c}$$

באותו האופן גם הכלל השני מתקיים:

בסיס:

$$(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$$

<u>הנחה</u>

$$(A_1 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \dots \cap A_n^c$$

צ"ל

$$(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1})^c = A_1^c \cap \dots \cap A_{n+1}^c$$

$$\boxed{(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1})^c} = ((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1})^c \underset{}{\overset{\text{בסיס}}{=}} (A_1 \cup \dots \cup A_n)^c \cap A_{n+1}^c$$

$$= \boxed{A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c \cap A_{n+1}^c}$$

(5)

אינדוקציה

בסיס: יהי $a\in A_1\Delta A_2$

אזי $a\in A_1, a\notin A_2 \vee a\notin A_1, a\in A_2$

ולכן a שייך למספר אי זוגי של קבוצות.

הנחה

יהי $a\in A_1\Delta\ldots\Delta A_n$

אזי $a\in$ מספר אי זוגי של קבוצות

צ"ל: נכון גם ל $A_1\Delta\ldots\Delta A_{n+1}$

הערה: הפרש סימטרי אסוציאטיבי ולכן

יהי $a\in(A_1\Delta\ldots\Delta A_{n+1}) = (A_1\Delta\ldots\Delta A_n)\Delta A_{n+1}$

אזי גם $a\in(A_1\Delta\ldots\Delta A_n)\Delta A_{n+1}$

אזי

$a\in A_1\Delta\ldots\Delta A_n, a\notin A_{n+1} \vee a\in A_{n+1}, a\notin A_1\Delta\ldots\Delta A_n$

לפי ההנחה זה אומר ש a שייך או לקבוצה אחת או למספר אי זוגי של הקבוצות - $(a\notin A_{n+1}, a\in A_1\Delta\ldots\Delta A_n)$

ובגלל ש 1 אי זוגי, אזי a שייך תמיד למספר אי זוגי של קבוצות.

יפה מאוד!