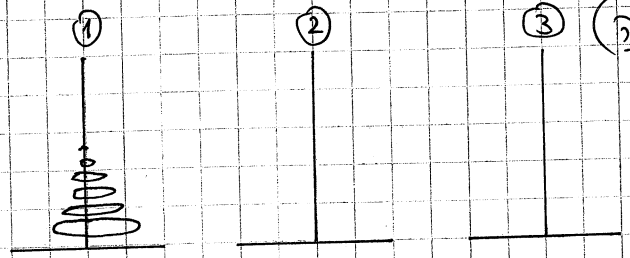
נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

7.1.14

דוגמא: מגדלי האנוי



המשימה: להעביר את כל הדיסקיות לעמוד השלישי כאשר בהתחלה יש 20 דסקיות בגדלים שונים, והם כולם על העמוד הראשון. אין להניח דיסקית על דיסקית קטנה יותר, ומעבירים דיסקית אחת בכל יום. תוך כמה ימים יצליחו להעביר את כולם?

פתרון: (עבור n דסקיות)

נניח שאנו יודעים לטפל ב-$n-1$ דסקיות

- נעביר $n-1$ דסקיות מעמוד 1 לעמוד 2
- נעביר את הדיסקית הגדולה מ-1 לעמוד 3
- נעביר $n-1$ דסקיות מ-2 ל-3 "וסיימנו" (מיואשת)

תנאי עצירה: אם $n=1$, פשוט מעבירים את הדיסקית ל-3.

נסמן ב-a_n את מספר הפעולות הדרושים:

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_n = 1 + 2a_{n-1} = 1 + 2(1+2a_{n-2}) = 1+2+4a_{n-2} = 1+2+4(1+2a_{n-3}) =$$
$$= 1+2+4+8a_{n-3} = \dots = 1+2+4+\dots+2^n a_0 = 1+2+4+\dots+2^{n-1} = \boxed{2^n-1}$$

סכום סדרה הנדסית

נתון: a_1, q אז: $a_1, a_1q, a_1q^2 \dots$

$$a_n = a_1 q^n \qquad S_n = a_1(1+q+q^2+q^3+\dots q^{n-1})$$

$$q \cdot S_n = a_1(q+q^2+q^3+\dots q^n) = S_n - a_1 + a_1 q^n$$

$$S_n(q-1) = a_1 q^n - a_1$$

$$\boxed{S_n = \frac{q^n-1}{q-1} a_1}$$

חידה: לאונרדו מטפס על סולם בן n שלבים, ובכל צעד לאונרדו יכול לעלות שלב אחד או שניים. בכמה דרכים הוא יכול לעלות בסולם?

פתרון: נסמן ב-a_n את מספר הדרכים לעלות על סולם בעל n שלבים.

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

סדרת פיבונאצ'י

האיברים הראשונים בסדרה: $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89$

חיבור שני האיברים האחרונים מהסדרה.

נחפש צורה מפורשת ל-a_n.

נגדיר פונקציה:
$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

נכפיל ב-x:
$$xP(x)=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\dots$$

באותה צורה נכפיל גם ב x^2:
$$x^2P(x)=a_0x^2+a_1x^3+a_2x^4+\dots$$

כעת ניתן להגיד:
$$P(x)=xP(x)+x^2P(x)$$

(אם נסתכל על המקדמים של x^3: $a_3=a_2+a_1$)

אך זה לא מדויק כי חסרים לנו נתונים על האיברים הראשונים, לכן:

$$\boxed{P(x)=xP(x)+x^2P(x)+a_0+(a_1-a_0)x=}$$
$$=xP(x)+x^2Px+1 \quad (\text{כאשר } a_0=a_1=1)$$

$$\boxed{|q|<1 \quad \sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}} \; *$$

$$P(x)=\frac{-1}{x^2+x-1}=\frac{1}{-x^2-x+1}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{-2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{-2} \qquad / \; -x^2-x+1=-(x-x_1)(x-x_2)$$

$$P(x)=\frac{1}{-(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}=\frac{\frac{A}{x_1}}{\frac{x-x_1}{x_1}}+\frac{\frac{B}{x_2}}{\frac{x-x_2}{x_2}}=\frac{A'}{\frac{x}{x_1}-1}+\frac{B'}{\frac{x}{x_2}-1}=$$

$$=\frac{-A'}{1-\frac{x}{x_1}}+\frac{-B'}{1-\frac{x}{x_2}}=-A'\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right)-B'\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right)=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-A'\frac{1}{x_1^n}-B'\frac{1}{x_2^n}\right)\cdot x^n}$$

המקדם של x^0: $1=a_0=-A'-B'$

המקדם של x^1: $1=a_1=-A'\cdot\frac{1}{x_1}-B'\frac{1}{x_2}$

בעזרתן נמצא את A', B'.

לכן התשובה הסופית היא:
$$a_n=-A'\left(\frac{1}{x_1}\right)^n-B'\left(\frac{1}{x_2}\right)^n$$