פתרון מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ד סמסטר קיץ מועד א

שאלה 1

__**סעיף א (8 נקודות)**__

מצאו את עוצמת קבוצת כל הפונקציות מ $\mathbb{Q}$ **על** $\mathbb{R}$.

__**סעיף ב (15 נקודות)**__

נאמר שסדרה של מספרים שלמים $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ היא **חסומה** אם קיים קבוע $M\in\mathbb{Z}$ כך ש $|a_n|\le M$ לכל $n\in\mathbb{N}$. מצאו את עוצמת קבוצת כל הסדרות החסומות של מספרים שלמים.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

__**פתרון:**__

סעיף א':

לפי משפט אם קיימת פונקציה $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ שהיא **על**, אזי מתקיים $\aleph=|\mathbb{R}|\le|\mathbb{Q}|=\aleph_0$ אך ידוע ש $\aleph_0<\aleph$, ולכן אין כאלה פונקציות, כלומר עוצמת הקבוצה היא 0.

סעיף ב':

נסמן ב A את קבוצת הסדרות החסומות של מספרים שלמים, ונראה בעזרת משפט קנטור-ברנשטיין שמתקיים $|A|=2^{\aleph_0}$.

קיים שיכון טבעי מהקבוצה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (סדרות של אפסים ואחדים) לתוך הקבוצה A, כיוון שהמספרים $0,1$ הם מספרים שלמים, ולכל סדרה $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ מתקיים $|a_n|\le 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (כלומר מדובר בסדרה חסומה), לכן הפונקציה $f:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to A$ המוגדרת ע"י $f(x)=x$ היא חח"ע, לכן $2^{\aleph_0}=\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|\le|A|$.

קיים שיכון טבעי מהקבוצה A אל הקבוצה $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ של כל הסדרות של מספרים שלמים (כיוון שכל סדרה חסומה של מספרים שלמים היא בפרט סדרה של מספרים שלמים). הפונקציה $g:A\to\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ המוגדרת ע"י $g(x)=x$ היא חח"ע, לכן $|A|\le\left|\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\right|=\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

$2^{\aleph_0}\le|A|\le 2^{\aleph_0}\Rightarrow|A|=2^{\aleph_0}$ לפי משפט קנטור-ברנשטיין.

שאלה 2

תהי A קבוצה שיש בה לפחות שני אברים. תהי $f:A\to A$ פונקציה.
נגדיר פונקציה חדשה $g:A\to P(A)$ על ידי
$g(a)=f^{-1}\left[f\left(\{a\}\right)\right]\triangle f\left[f^{-1}\left(\{a\}\right)\right]$.
הוכח או הפרך: אם f חד חד ערכית אז g אינה חד חד ערכית.

פתרון:
נוכיח שטענה נכונה.
נניח כי f חח"ע.
נסמן $b=f(a)$, אז $f^{-1}(b)=a$. לכן, צד ימין של ההפרש הסימטרי הוא
$$f^{-1}\left[f\left(\{a\}\right)\right]=\{a\}$$
בצד ימין יתכנו שתי אפשרויות:
אם a בטווח של f אז נסמן $f^{-1}\left(\{a\}\right)=\{c\}$ ולכן $f\left[f^{-1}\left(\{a\}\right)\right]=f\left(\{c\}\right)=\{a\}$, כלומר $g(a)=\phi$.
אם a אינו בטווח של f אז $f^{-1}\left(\{a\}\right)=\phi$ ולכן $f\left[f^{-1}\left(\{a\}\right)\right]=f\left(\phi\right)=\phi$ כלומר $g(a)=\{a\}$.
ב A יש לפחות שני איברים a_1, a_2. אם היא חח"ע אז התמונה שלהם שונה $f(a_1)=b_1\neq b_2=f(a_2)$.
לכן $g(b_1)=g(b_2)=\phi$. g אינה חח"ע.

שאלה 3 (23 נקודות)

הוכח את המשפט: קבוצה חלקית לקבוצה בת מניה היא קבוצה בת מניה.

פתרון

נוכיח, תחילה, שכל תת קבוצה של $\mathbb{N}$ היא בת מנייה. תהי B תת קבוצה של $\mathbb{N}$. אם B סופית היא בת מנייה על פי ההגדרה של קבוצה בת מנייה. אם B אינסופית נמצא פונקציה $f:B\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.

לכל $x\in B$ הקבוצה $\{y\in B|y\le x\}$ היא סופית (מספרם הוא לכל היותר x). תהיי $f:B\to\mathbb{N}$ הפונקציה הבאה: $f(x)=|\{y\in B|y\le x\}|$.

נוכיח ש $f:B\to\mathbb{N}$ חח"ע. נניח ש $x_1,x_2\in B$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)$ ז"א $|\{y\in B|y\le x_1\}|=|\{y\in B|y\le x_2\}|$. נניח בשלילה ש $x_1\ne x_2$ אז ניתן להניח ב.ה.ג.כ ש $x_1<x_2$.

מכיוון ש $x_1<x_2$ אז $\{y\in B|y\le x_1\}\subseteq\{y\in B|y\le x_2\}$ $(y\le x_2 \Leftarrow y\le x_1\wedge x_1<x_2)$ ולכן $|\{y\in B|y\le x_1\}|\le|\{y\in B|y\le x_2\}|$ מכיוון ש $x_2\notin\{y\in B|y\le x_1\}\wedge x_2\in\{y\in B|y\le x_2\}$ אז $|\{y\in B|y\le x_1\}|\le|\{y\in B|y\le x_2\}\setminus\{x_2\}|$ ז"א $|\{y\in B|y\le x_1\}|\ne|\{y\in B|y\le x_2\}|$ בסתירה לכך ש $|\{y\in B|y\le x_1\}|=|\{y\in B|y\le x_2\}|$.

נוכיח ש f היא על ז"א צ"ל שלכל $n\in\mathbb{N}$ יש מקור.

נוכיח באינדוקציה. B אינסופית ולכן $B\ne\phi$ ז"א יש לה איבר ראשון a_0 ואז $f(a_0)=1$.

נניח שיש מקור ל $n\in\mathbb{N}$ כל שהו ונוכיח של $n+1$ יש מקור. B אינסופית וקבוצת איברי B שאינם עולים על a היא סופית, לכן קבוצת איברי B הגדולים מ a אינה ריקה, יהי b הראשון שביניהם ואז $f(b)=n+1$.

תהיי A קבוצה בת מנייה כלשהי, אם A סופית, כל תת קבוצה שלה סופית, ולכן בת מנייה. אם A אינסופית, אז A שקולה ל $\mathbb{N}$. תהיי B תת קבוצה של A ונוכיח שהיא בת מניה. תהיי f פונקציה חח"ע מ A על $\mathbb{N}$, אז $f[B]\subseteq\mathbb{N}$ ולכן היא בת מנייה. הפונקציה $g:B\to f[B]$, כך שלכל $x\in B$ $f(x)=g(x)$, היא חח"ע מ B על $f[B]$, לכן B שקולה לקבוצה בת מנייה ולכן היא בת מנייה.

שאלה 4

תהי X קבוצה אינסופית. **קדם-חלוקה בת-מניה** של X היא משפחה $\mathcal{F}\subseteq P(X)$ של קבוצות זרות בזוגות כך ש $|A|=\aleph_0$ לכל $A\in\mathcal{F}$.

חלוקה בת-מניה של X היא חלוקה של X שהיא גם קדם-חלוקה בת-מניה.

א. (15 נקודות) הראו כי קיימת קדם-חלוקה מקסימלית של X ביחס להכלה.

ב. (8 נקודות) הראו כי קיימת חלוקה בת-מניה של X.

פתרון:

סעיף א':

נסמן ב $\mathcal{A}$ את קבוצת כל הקדם-חלוקות בנות-המניה של X. $\mathcal{A}$ היא תת-קבוצה של $P(P(X))$ ולכן ניתן לצמצם עליה את יחס ההכלה של קבוצות מ $P(P(X))$.

$\mathcal{A}\neq\varnothing$ כי $\mathcal{F}=\varnothing\subseteq P(X)$ היא קדם-חלוקה בת מניה, ולכן $\varnothing\in\mathcal{A}$.

תהי $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת של קדם-חלוקות בנות-מניה, אזי $\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha$ היא קדם-חלוקה בת-מניה,

כיוון ש:

1) לכל $x\in\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha$ קיים $\alpha\in I$ כך ש $x\in\mathcal{F}_\alpha$ ולכן x קבוצה המקיימת $|x|=\aleph_0$

2) נניח ש- $x,y\in\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha$ איברים שונים. אזי קיימים אינדקסים שונים $\alpha,\beta\in I$ כך ש $x\in\mathcal{F}_\alpha, y\in\mathcal{F}_\beta$. כיוון ש $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת מתקיים בלי הגבלת כלליות $\mathcal{F}_\alpha\subseteq\mathcal{F}_\beta$ ולכן $x,y\in\mathcal{F}_\beta$. כיוון ש $\mathcal{F}_\beta$ קדם-חלוקה בת-מניה נקבל $x\cap y=\varnothing$.

לכל $\beta\in I$ מתקיים $\mathcal{F}_\beta\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha$ ולכן השרשרת $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ חסומה מלעיל.

לכן מתקיימים תנאי הלמה של צורן, ולכן ב $\mathcal{A}$ יש איבר מקסימלי.

סעיף ב':

ראינו בסעיף א' שקיימת קדם-חלוקה מקסימלית $\mathcal{F}$ של X. הקבוצה $Y=\bigcup_{x\in\mathcal{F}}x$ היא תת-קבוצה של X. אם $Y=X$ אז סיימנו, כי $\mathcal{F}$ מקיימת את תנאי חלוקה ולכן היא חלוקה בת-מניה של X. אחרת, נסמן $Z=X\setminus Y\neq\varnothing$.

אם Z קבוצה סופית, אזי בהכרח $\mathcal{F}\neq\varnothing$ (כי אחרת X סופית, בסתירה להנחת התרגיל).

לכן קיים $A\in\mathcal{F}$. נגדיר $\mathcal{F}=\left(\mathcal{F}\setminus\{A\}\right)\cup\{A\cup Z\}$ (החלפנו את הקבוצה A בקבוצה $A\cup Z$). נראה ש- $\mathcal{F}$ היא חלוקה של X:

1) מתקיים $X=\bigcup_{x\in\mathcal{F}}x$, כיוון ש

$$\bigcup_{x\in\mathcal{F}}x=\left(\bigcup_{x\in\mathcal{F}\setminus\{A\}}x\right)\cup\left(A\cup Z\right)=\left(\bigcup_{x\in\mathcal{F}\setminus\{A\}}x\cup A\right)\cup Z=\left(\bigcup_{x\in\mathcal{F}}x\right)\cup Z=Y\cup Z=X$$

2) הקבוצות ב- $\mathcal{F}$ זרות בזוגות, כיוון שאם $x,y\in\mathcal{F}$ איברים שונים, אזי אם $x,y\in\mathcal{F}$ זרות לפי הנחה ש $\mathcal{F}$ קדם-חלוקה; אחרת, נניח בלי הגבלת כלליות ש $x\in\mathcal{F},\ \ y=A\cup Z,$ ואז כיוון ש $x\cap A=\varnothing$ ו- $x\cap Z=\varnothing$ נקבל $x\cap y=\varnothing$.

נשים לב ש $|A\cup Z|=|A|+|Z|\leq\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$, ולכן $\mathcal{F}$ היא חלוקה בת-מניה (כל שאר האיברים ב $\mathcal{F}$ הם איברים של $\mathcal{F}$, ולכן הם מעוצמה $\aleph_0$.

אם Z קבוצה אינסופית, אזי היא מכילה תת-קבוצה A מעוצמה $\aleph_0$. נגדיר $\mathcal{F}=\mathcal{F}\cup\{A\}$ אזי $\mathcal{F}$ קדם-חלוקה בת-מניה של X:

1) הקבוצות ב $\mathcal{F}$ זרות בזוגות, כי הקבוצות ב $\mathcal{F}$ זרות בזוגות, והקבוצה A זרה לכל הקבוצות ב $\mathcal{F}$ כי $A\subseteq Z=X\setminus Y=X\setminus\left(\bigcup_{x\in\mathcal{F}}x\right)$.

2) לפי בחירת A ולפי $\mathcal{F}$ קדם-חלוקה כל הקבוצות ב $\mathcal{F}$ הן מעוצמה $\aleph_0$.

נשים לב שמתקיים $A\notin\mathcal{F}$ ולכן $\mathcal{F}\subsetneq\mathcal{F}$ בסתירה למקסימליות $\mathcal{F}$, כלומר המקרה Z קבוצה אינסופית בלתי אפשרי.

שאלה 5

<u>סעיף א (12 נקודות)</u>

גרף קשיר שאין בו אף מעגל נקרא עץ. קודקוד בעץ שדרגתו שווה 1 נקרא עלה. הוכיחו שבכל עץ עם $2 \le n$ קודקודים יש עלה.

<u>סעיף ב (11 נקודות)</u>

נגדיר יחס R על משפחה של קבוצות X באופן הבא: $(A,B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B$.

i. נתון ש $X = P(\mathbb{N})$ רשום את האיבר הקטן ביותר והגדול ביותר. נמק!

ii. נתון ש $X = P(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ רשום קבוצה שמכילה את כל האיברים המינימלים. נמק!

<u>הערה</u>

אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

פתרון

<u>סעיף א</u>

נוכיח באינדוקציה שבכל עץ עץ עם $2 \le n$ קודקודים יש לפחות שני עלים.

$n=2$: בגרף קשיר עם שני קודקודים יש שני עלים X----X

נניח שהטענה נכונה לכל $k \le n$ ונוכיח עבור $n+1$:

יהי v קודקוד בגרף. הגרף קשיר ולכן חלה בו קשת.

אם דרגתו 1, הוא עלה וסיימנו.

אחרת, תהי e קשת החלה ב v. נמחוק את e מהגרף.

טענה: קיבלנו גרף לא קשיר עם שתי מחלקות קשירות. אחרת יש בגרף מעגל.

אם באחת ממחלקות הקשירות יש רק קודקוד יחיד, הוא היה עלה.

אחרת, כל מחלקת קשירות היא עץ עם $k < n$ קודקודים. לפי הנחת האינדוקציה, יש בה שני עלים. יתכן ו e מחברת שניים מהם, אבל בסך הכל יש בגרף שני עלים.

<u>סעיף ב</u>

<u>סעיף ב1</u>

האיבר הגדול ביותר הוא $\mathbb{N}$ מכיוון שלכל $A \in P(\mathbb{N})$ נקבל מהגדרת קבוצת החזקה ש $A \subseteq \mathbb{N}$ ז"א $(A,\mathbb{N}) \in R$.

האיבר הקטן ביותר הוא $\varnothing$ מכיוון שקבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה נקבל שלכל $A \in P(\mathbb{N})$ $\varnothing \subseteq A$ ז"א $(\varnothing, A) \in R$.

<u>סעיף ב2</u>

יהי $a \in \mathbb{N}$. הקבוצות היחידות שמוכלות את $\{a\}$ הן $\varnothing, \{a\}$ מכיוון ש
$\varnothing \notin P(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ לא קיים $\{a\} \neq A \in P(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ כך ש $A \subseteq \{a\}$ ז"א $(A, \{a\}) \in R$
ולכן $\{a\}$ איבר מינימלי.

הקבוצה המבוקשת היא $\{\{a\} | a \in \mathbb{N}\}$.