מתמטיקה בדידה (88195), סמסטר קיץ תשעט, מועד ב'

6.9.2019, ט"ו אלול תשעט

מרצים: גברת תמר בר־און, ד"ר אפי כהן, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: עדי בן־צבי, אחיה בר־און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, עובד נגר, עומר נטר, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות.
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד.
  ניתן להשתמש במחברת כטיוטא, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A,B,C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

פתרון: הוכחה: יהא $X\in P(A)\cup P(B)$ אזי $X\in P(A)\vee X\in P(B)$ שגורר כי $X\subseteq A\vee X\subseteq B$. כיוון ש $A,B\subseteq A\cup B$ נקבל לפי טר' שבכל מקרה $X\subseteq A\cup B$ ולכן $X\in P(A\cup B)$.

(ב) $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash C$

פתרון: הוכחה: נגדיר קבוצה אוניברסלית $U=A\cup B\cup C$ ואז

$$A\cap(B\backslash C)=A\cap(B\cap C^c)=(A\cap B)\cap C^c=(A\cap B)\backslash C$$

כנדרש.

(ג) אם $P(A)\cap P(B)=A$ אז $B\subseteq A$

פתרון: הפרכה: נגדיר $A=\{\emptyset\},B=\{1\}$ אזי $P(A)\cap P(B)=\{\emptyset\}=A$ אבל B לא מוכל ב A .

(ד) $B\backslash(A\backslash B)=B\backslash(C\backslash B)$

פתרון: הוכחה: לפי הגדרה, כל $x\in A\backslash B$ מקיים כי $x\notin B$ ולכן $B\backslash(A\backslash B)=B$. באופן דומה $B\backslash(C\backslash B)=B$ ולכן מתקיים השיוויון הדרוש.

דף נוסף לשאלה מספר___

2. (20 נק') נגדיר יחס S על $\mathbb{R}$ ע"י הכלל: aSb אמ"מ $a-b\in\mathbb{Z}$

(א) הוכיחו כי S יחס שקילות.
פתרון: רפלקסיביות: לכל a ממשי מתקיים כי $a-a=0\in\mathbb{Z}$ ולכן aSa.
סימטריות: נניח a,b ממשיים כך ש aSb אזי $a-b\in\mathbb{Z}$ ולכן גם $b-a=-(a-b)\in\mathbb{Z}$ מה שגורר כי bSa.
טרנזיטיביות: נניח a,b,c ממשים כך ש $aSb\wedge bSc$ אזי $[a-b\in\mathbb{Z}]\wedge[b-c\in\mathbb{Z}]$ כיוון שחיבור של מספרים שלמים הוא שלם נקבל כי $a-c=(a-b)+(b-c)\in\mathbb{Z}$ מה שגורר ש aSc.

(ב) מצאו את מחלקות השקילות $[0]_S,[0.5]_S$.
פתרון: לפי הגדרה

$$[0]_S=\{x\in\mathbb{R}\mid xS0\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x-0\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}$$

באופן דומה

$$\begin{aligned}[0.5]_S&=\{x\in\mathbb{R}\mid xS0.5\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x-0.5\in\mathbb{Z}\}\\&=\{x\in\mathbb{R}\mid \exists z\in\mathbb{Z}:x-0.5=z\}=\{z+0.5\mid z\in\mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $[x]_S=[-x]_S$.
פתרון: הפרכה: למשל, נראה כי $[\frac{1}{4}]_S\neq[-\frac{1}{4}]_S$. זה שקול להראות כי $\left(\frac{1}{4}.-\frac{1}{4}\right)\notin S$ וזה אכן מתקיים כי $\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

(ד) קבעו האם עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}/S|$ היא $\aleph,\aleph_0$, סופית או אחרת. הוכיחו קביעתכם.
פתרון: נוכיח כי $|\mathbb{R}/S|=\aleph$. מצד אחד: הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/S$ המוגדרת $f(x)=[x]_S$ היא על (לפי הגדרה) ולכן $\aleph=|\mathbb{R}|\geq|\mathbb{R}/S|$.
מצד שני נוכיח כי הפונקציה $g:\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\to\mathbb{R}/S$ המוגדרת $g(x)=[x]_S$ היא חח"ע ואז $|\mathbb{R}/S|\geq\left|\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\right|=\aleph$ ואז לפי ק.ש.ב יש שיוויון. הוכחה: יהיו $x_1\neq x_2$ ב $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ אזי $|x_1-x_2|\in(0,\frac{1}{4})$ ובפרט x_1-x_2 אינו שלם. לכן $(x_1,x_2)\notin S$ מה ששקול לכך ש $g(x_1)=[x_1]_S\neq[x_2]_S=g(x_2)$ כנדרש.

דף נוסף לשאלה מספר___

.3

(א) (10 נק') תהי פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ונגדיר יחס R על $\mathbb{N}$ ע"י הכלל: aRb אמ"מ $f(a)\le f(b)$.

i. הוכיחו שאם f חח"ע אז R יחס סדר חלקי $\mathbb{N}$.

פתרון: רפלקסיביות: לכל a טבעי מתקיים כי $f(a)=f(a)$ ובפרט $f(a)\le f(a)$ ולכן aRa.
אנטי סימטריות סימטריות: נניח a,b טבעיים כך ש $aRb\wedge bRa$ אזי $[f(a)\le f(b)]\wedge[f(b)\le f(a)]$ ולכן $f(a)=f(b)$. אם f חח"ע אזי $a=b$.
טרנזיטיביות: נניח a,b,c ממשים כך ש $aRb\wedge bRc$ אזי $[f(a)\le f(b)]\wedge[f(b)\le f(c)]$ כיוון ש"קטן שווה" הוא טרנזיטיבי, נקבל כי $f(a)\le f(c)$ מה שגורר ש aRc.

ii. תנו דוגמה ל f שעבורה R אינו יחס סדר חלקי על $\mathbb{N}$.

פתרון: למשל, הפונקציה הקבועה על 1, כלומר, לכל x טבעי נגדיר $f(x)=1$ ואז לפי הגדרה $1R2$ ו $2R1$ ומכיוון ש $1\neq 2$ נקבל כי R אינו אנטי סימטרי ובפרט אינו יחס סדר חלקי.

(ב) (10נק') תהא $f:X\to Y$ פונקציה הפיכה. הוכיחו שלכל $A\subseteq X$ מתקיים כי $f[X\setminus A]=Y\setminus f[A]$.

פתרון: תהא A ת"ק של X ונראה את השיוויון המבוקש ע"י הכלה דו כיוונית.

($\subseteq$) יהא $y\in f[X\setminus A]$ אזי קיים $x\in X\setminus A$ כך ש $y=f(x)$. כיוון ש $x\in X$ אזי $y=f(x)\in Y$. בנוסף, $x\notin A$ ו f חח"ע ולכן $f(x)\notin f[A]$ (אחרת $f(x)=f(a)$ עבור $a\in A$ ומחח"ע של f נקבל $x=a\in A$. סתירה). מצירוף השניים נקבל כי $y=f(x)\in Y\setminus f[A]$.

($\supseteq$)יהא $y\in Y\setminus f[A]$. כיוון ש $y\in Y$ ו f על, קיים $x\in X$ כך ש $f(x)=y$. כיוון ש $y\notin f[A]$ נקבל כי $x\notin A$ (אחרת $x\in A$ ואז $y=f(x)\in f[A]$. סתירה). קיבלנו כי $x\in X\setminus A$ ולכן $y=f(x)\in f[X\setminus A]$ כנדרש.

דף נוסף לשאלה מספר___

4. (20 נק'.) קבעו והוכיחו עבור על אחת מהקבוצות הבאות אם עוצמתה $\aleph_0$, א, $2^{א}$ סופית או אחרת.

(א) $A = P(P(\mathbb{N}))$

פתרון: מחישוב ישיר $|A| = |P(P(\mathbb{N}))| = 2^{|P(\mathbb{N})|} = 2^{\left(2^{\aleph_0}\right)} = 2^{א}$.

(ב) הקבוצה B המוגדרת כקבוצת כל הפונקציות החח"ע מ $P(\mathbb{N})$ ל $\mathbb{N}$.

פתרון: נראה כי $B = \emptyset$ ולכן עוצמתה שווה 0. הוכחה: נניח בשלילה כי קיימת $f \in B$ אזי $f : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ חח"ע ולכן $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \geq |P(\mathbb{N})| = א$. סתירה.

(ג) הקבוצה C המוגדרת כקבוצת כל הפונקציות העל מ $\mathbb{N}$ ל $\{1,2\}$.

פתרון: נראה כי $|C| = א$. נגדיר C' להיות קבוצת כל הפונקציה שאינן על מ $\mathbb{N}$ ל $\{1,2\}$. כלומר $C' = \{f_1, f_2\}$ מעוצמה 2 (כאשר, לכל x טבעי, מוגדר $f_i(x) = i$ $[i = 1,2]$). מהגדרה נובע כי $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ הוא איחוד זר של $C \cdot C'$ ולכן

$$א = 2^{\aleph_0} = \left|\{1,2\}^{\mathbb{N}}\right| = |C \cup C'| = |C| + |C'| = |C| + 2$$

ולכן $|C| = א$ (כי אם Cהייתה סופית נקבל כי $|C| + 2$ סופית בסתירה ולכן Cאינסופית ואז $|C| + 2 = \max\{|C|, 2\} = |C|$).

(ד) $D = \left\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 = 1\right\}$ (מעגל היחידה).

פתרון: מצד אחד $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ולכן $|D| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = א \cdot א = א$.

מצד שני: נגדיר $f : (0,1) \to D$ ע"י $f(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \in D$ שהיא חח"ע ולכן $|D| \geq |(0,1)| = א$.

לפי ק.ש.ב יש שיוויון $|D| = א$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

5. (20 נק').

(א) נגדיר סדרת קבוצות ע"י $A_1 = \emptyset$ ולכן n טבעי נגדיר $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$.

i. (3 נק') מצאו את A_2, A_3, A_4.

פתרון: מהגדרה

$$A_2 = A_1 \cup \{A_1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$A_3 = A_2 \cup \{A_2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$A_4 = A_3 \cup \{A_3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

ii. (10 נק') הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי ולכל $k < n$ טבעי מתקיים כי $A_k \in A_n$.

פתרון: באינדוקציה על n: עבור $n = 1$ אין $k < n$ טבעי ולכן הטענה מתקיימת. כעת נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n + 1$. יהא $k < n + 1$ ונראה כי $A_k \in A_{n+1}$.

אם $k = n$ אזי, לפי הגדרה $A_n \in \{A_n\} \subseteq A_n \cup \{A_n\} = A_{n+1}$.

אחרת $k < n$ ואז לפי הנחת האינדוקציה $A_k \in A_n$ כיוון ש $A_n \subseteq A_n \cup \{A_n\} = A_{n+1}$ נקבל כי $A_k \in A_{n+1}$.

(ב) (7 נק') יהא $G = (V, E)$ גרף עם n קודקודים ונניח כי דרגת כל הקודקודים היא 1.

i. האם ייתכן כי $n = 7$? הוכיחו תשובתכם.

פתרון: לא ייתכן. הוכחה: נניח בשלילה כי $n = 7$ ואז לפי למת לחיצת היידים ולפי הנתון נקבל כי

$$2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in V} 1 = n = 7$$

וקיבלנו ש 7 מספר זוגי. סתירה.

ii. מצאו את כמות רכיבי הקשירות (השונים) של G.

פתרון: נתחיל מכך ש n זוגי. הוכחה: למת לחיצת היידים ולפי הנתון נקבל כי

$$2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in V} 1 = n$$

וקיבלנו את המבוקש.

כעת לכל $v \in V$ מתקיים כי $\deg v = 1$ ולכן קיים $v \neq u \in V$ יחיד כך ש $\{v, u\} \in E$ ולכן רכיב הקשירות של v הוא $\{v, u\}$. קיבלנו שכל רכיבי הקשירות הם מגודל 2 בדיוק.

בנוסף, כיוון שרכיבי הקשירות הם מחלקות שקילות עם היחס "קיים מסלול" נקבל כי רכיבי הקשירות הם חלוקה של V ולכן מספרם הוא

$$\frac{|V|}{2} = \frac{n}{2}$$

(כאשר 2 הוא מספר גודל כל רכיב קשירות כאמור).

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___