

בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשפ, מועד א' - פתרון

מרצים: מר אחיה בר-און, גברת תמר בר-און, מר בארי גרינפלד, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, יפעת חדד, עוזי חרוש, עומר נטר, גלעד פורת-קורן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הנחיות:

- יש לענות על כל 6 השאלות.
- סך הנקודות במבחן הוא 106. ציון מעל 100 יעוגל ל 100 (חלק א 70 נקודות וחלק ב 36 נקודות)
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

חלק א

1. נגדיר שתי פרידקטים: $P(k)$ המביע כי k זוגי ו $S(k, m)$ המביע כי $k + m$ מתחלק ב 3 ללא שארית (משתני הפרדיקטים נלקחים מהטבעיים. הערה: 0 אינו טבעי).

(א) מצאו קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ כך ש $\{3, 5, 9\} \subseteq A$ שעבורה הפסוק

$$\forall k \in A : (P(k) \vee (\exists m \in A : k < m))$$

בעל ערך אמת True. אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$ (למשתמשי XI. למשתמשי "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובתכם).

פתרון: הפסוק אומר במילים: לכל איבר k ב A מתקיים ש: או ש k זוגי או שקיים איבר ב A שגדול ממנו. ולכן נדאג שב A יהיה איבר גדול ביותר ושהוא יהיה זוגי. למשל $A = \{3, 5, 9, 10\}$. ואז אכן לכל איבר ב A או שהוא זוגי (כלומר 10 במקרה שלנו) או (עבור שאר האיברים האי-זוגיים) שקיים איבר ב A שגדול מהם (כך? $3 < 10, 5 < 10, 9 < 10$).

(ב) מצאו קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ כך ש $\{4, 5, 9\} \subseteq A$ שעבורה הפסוק

$$\exists k \in A \forall m \in A : (S(k, m) \vee P(m))$$

בעל ערך אמת True. אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$ (למשתמשי XI. למשתמשי "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובתכם).

פתרון: הפסוק אומר במילים: קיים איבר k ב A כך שלכל איבר m ב A מתקיים ש: או ש m זוגי או שהסכום $k + m$ מתחלק ב 3. נניח בשלילה שקיים כזאת A (כנדרש בשאלה). אזי קיים $k \in A$ עבורו מתקיים ש: $\forall m \in A : (S(k, m) \vee P(m))$ בפרט זה מתקיים עבור $m_1 = 5, m_2 = 9$ (שהרי אלו איברים ב A) כיוון ש m_1, m_2 אי-זוגיים אז מתקיים כי $S(k, m_1)$ וגם $S(k, m_2)$ כלומר מתקיים ש $k + m_1$ מתחלק ב 3 ללא שארית וגם $k + m_2$ מתחלק ב 3 ללא שארית. כלומר

$$k + m_1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$k + m_2 \equiv 0 \pmod{3}$$

אבל $m_2 \equiv 0 \pmod{3}$ ו $m_1 \equiv 2 \pmod{3}$ ולכן נקבל ש

$$\begin{aligned} k + 2 &\equiv 0 \pmod{3} \\ k &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

כלומר ש $k + 2$ מתחלק ב 3 ללא שארית, שזה אומר ש k מתחלק ב 3 עם שארית 1 ומצד שני k מתחלק ב 3 ללא שארית. סתירה.

(ג) תהינה שתי קבוצות A, C עבורן נתון כי

$$\begin{aligned} \{4, 6, 7, 8, 13\} &= A \\ \{2, 3, 5\} &\subseteq C \end{aligned}$$

מצאו קבוצה B עבורה מתקיים בהכרח $A \Delta B \subseteq C$. אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$ (למשתמשי XI). למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובתכם.

פתרון: נגדיר $B = A$ ואז $A \Delta B = A \Delta A = \emptyset$ שמוכל ב C .

(ד) תהינה שתי קבוצות

$$\begin{aligned} A &= \{6, 7, 8, 9, 10\} \\ B &= \{2, 4, 5, 7, 8\} \end{aligned}$$

מצאו קבוצה X עבורה מתקיים $X \in P(A \cup B)$ אך $X \notin P(A) \cup P(B)$ (כאשר $P(*)$ הוא סימון שקבוצה החזקה של $*$). אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$ (למשתמשי XI). למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובתכם).

פתרון: נגדיר $X = \{2, 6\}$ ואז $X \subseteq A \cup B$ ולכן $X \in P(A \cup B)$. מצד שני $X \not\subseteq A$ וגם $X \not\subseteq B$ ולכן $X \notin P(A)$ וגם $X \notin P(B)$.

2. נגדיר פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(n)$ הוא כמות המספרים (הטבעיים) המחלקים את n . במפורש

$$f(n) = |\{k \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N} : n = ka\}|$$

(הערה 0 אינו טבעי). תהא

$$A = \{5, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 121\}$$

ונגדיר על A יחס סדר R על ידי הכלל: aRb אם m

$$(f(a) < f(b)) \vee (a = b)$$

(הערה: אין צורך להוכיח כי זהו יחס סדר).

(א) חשבו את $f(24)$

פתרון: מתקיים $24 = 2^3 \cdot 3$ (הפירוק של 24 לראשוניים) ולכן קבוצת כל המחלקים שלו הם $\{2^i 3^j \mid i \in \{0, 1, 2, 3\}, j \in \{0, 1\}\}$ ומספרם הוא $4 \cdot 2 = 8$ (כל בחירה שונה ל i, j תתן מחלק אחר) ולכן $f(24) = 8$ באופן כללי אם n מספר טבעי ו $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ כאשר p_1, \dots, p_k מספרים ראשוניים שונים זה מזה ו $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ חזקות (טבעיות) אז קבוצת המחלקים של n היא

$$\{p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \mid \beta_1 \in \{0, \dots, \alpha_1\}, \dots, \beta_k \in \{0, \dots, \alpha_k\}\}$$

ולכן

$$f(n) = \left| \{p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \mid \beta_1 \in \{0, \dots, \alpha_1\}, \dots, \beta_k \in \{0, \dots, \alpha_k\}\} \right| = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

(ב) מצאו את קבוצת כל האיברים המקסמאליים ב A .

(ג) מצאו את קבוצת כל האיברים המינימאליים ב A .

(ד) מצאו את קבוצת כל האיברים הגדולים ביותר ב A .

(ה) מצאו את קבוצת כל האיברים הקטנים ביותר ב A .
פתרון: נרשום את הפירוק למכפלה של ראשוניים של המספרים המופיעים ב A ,

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \\ 8 &= 2^3 \\ 9 &= 3^2 \\ 12 &= 3 \cdot 2^2 \\ 15 &= 3 \cdot 5 \\ 18 &= 2 \cdot 3^2 \\ 24 &= 2^3 \cdot 3 \\ 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 121 &= 11^2 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} f(5) &= 2 \\ f(6) &= 2 \cdot 2 = 4 \\ f(8) &= 4 \\ f(9) &= 3 \\ f(12) &= 2 \cdot 3 = 6 \\ f(15) &= 2 \cdot 2 = 4 \\ f(18) &= 2 \cdot 3 = 6 \\ f(24) &= 4 \cdot 2 = 8 \\ f(30) &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ f(121) &= 3 \end{aligned}$$

ולכן $\{5\}$ היא קבוצת כל האיברים המינימאליים (אין איבר עם $f(*)$ יותר קטן ממש ממנו בקבוצה A). יותר מכך לכל $a \in A$ ששונה מ 5 מתקיים כי $f(5) < f(a)$ ולכן $(5, a) \in R$ ולכן 5 הוא האיבר הקטן ביותר ו $\{5\}$ הוא קבוצת כל האיברים הקטנים ביותר.

בנוסף, $\{24, 30\}$ היא קבוצת כל האיברים המקסימאליים (אין איבר עם $f(*)$ יותר גדול ממש מכל אחד מהם בקבוצה A). אין איברים גדולים ביותר מכיוון שאם יש אז יש רק אחד ואז הוא מקסימאלי יחיד אבל אצלנו יש 2 מקסימאליים ולכן קבוצת כל האיברים הגדולים היא קבוצה ריקה.

3. תהא $A = \{1, \dots, 10\}$ קבוצת המספרים הטבעיים בין 1 ל 10 (כולל 1 וכולל 10). נגדיר יחס R על A להיות

$$R = \{(8, 8), (9, 8), (7, 1), (4, 7)\}$$

ונגדיר S להיות קבוצת כל יחסי השקילות על A שמכילים את R ונסמן $T = \cap_{X \in S} X$.

(א) הוכיחו/הפריכו: T יחס שקילות. במידה והוא יחס שקילות, מצאו את מחלקת השקילות $[9]_T$. במידה ו T אינו יחס שקילות, הזינו $\{\}$ (למשתמשי XI. למשתמשי "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

פתרון: נראה תחילה ש $T = \cap_{X \in S} X$ הוא יחס שקילות.

- רפלקסיביות: יהא $a \in A$ צ"ל $(a, a) \in T$. כל $X \in S$ הוא יחס שקילות על A ולכן $(a, a) \in X$ ולכן $(a, a) \in T$ (נמצא בחיתוך של כולם שזה T)

- סימטריות: יהיו $a, b \in A$ כך ש $(a, b) \in T$ וצ"ל $(b, a) \in T$. כיוון ש $(a, b) \in T$ נקבל שלכל $X \in S$ מתקיים $(a, b) \in X$. מכיוון שכל $X \in S$ הוא יחס שקילות ולכן סימטרי נקבל שגם $(b, a) \in X$ ולכן $(b, a) \in T$ שייך בחיתוך של כולם שזה T

- טרנזיטיביות: יהיו $a, b, c \in A$ כך ש $(a, b) \in T$ וגם $(b, c) \in T$ וצ"ל $(a, c) \in T$. כיוון ש $(a, b) \in T$ וגם $(b, c) \in T$ נקבל שלכל $X \in S$ מתקיים $(a, b) \in X$ וגם $(b, c) \in X$. מכיוון שכל $X \in S$ הוא יחס שקילות

ולכן טרנזיטיבי נקבל שגם $(a, c) \in X$ ולכן (a, c) שייך בחיתוך של כולם שזה T

כעת נמצא את T ונחשב את $[9]_T$: לכל יחס שקילות X המקיים כי $R \subseteq X$ מתקיים כי 1, 7 באותה מחלקת שקילות כי $(7, 1) \in X$ ומתקיים גם ש 1, 4 באותה מחלקת שקילות (כי $(7, 1) \in X$), $(4, 7) \in X$ ומכיוון שטרנזיטיבי גם $(4, 1) \in X$. בנוסף 8, 9 באותה מחלקת שקילות כי $(9, 8) \in X$ ולכן X חייב להכיל את

$$(\{1, 4, 7\} \times \{1, 4, 7\}) \cup (\{8, 9\} \times \{8, 9\}) \cup I_{\{2,3,5,6,10\}}$$

מכיוון שזהו יחס שקילות בעצמו זה היחס המושרה מהחלוקה $\{\{1, 4, 7\}, \{8, 9\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{10\}\}$ נקבל שזהו בדיוק T ולכן $[9]_T = \{8, 9\}$

(ב) מצאו U , איבר מינימאלי ביחס להכלה בקבוצה $S \setminus \{T\}$ (כלומר בקס"ח $(S \setminus \{T\}, \subseteq)$). כתבו כמה מחלקות שקילות יש בקבוצת המנה A/U .

פתרון: כמו שראינו, U מכיל את הקבוצה

$$(\{1, 4, 7\} \times \{1, 4, 7\}) \cup (\{8, 9\} \times \{8, 9\}) \cup I_{\{2,3,5,6,10\}}$$

(מכיוון שזהו יחס שקילות שמכיל את R) אבל לא שווה לו (כי זהו T). ב T יש 7 מחלקות שקילות (בצורה מפורשת: $\{\{1, 4, 7\}, \{8, 9\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{10\}\}$) ולכן ב U צריך להיות לכל היותר 6 מחלקות שקילות (אם היה 7 היינו מקבלים ש $U = T$ ויותר מ 7 לא יכול להיות (מאותה סיבות ממקודם, 1, 4, 7 מתייחסים זה לזה ו 8, 9 מתייחסים זה לזה). נגדיר U להיות יחס השקילות

$$(\{1, 4, 7, 8, 9\} \times \{1, 4, 7, 8, 9\}) \cup I_{\{2,3,5,6,10\}}$$

(שזה שקול לתת עוד נתון אחד ש $(1, 8) \in U$) שיש לו 6 מחלקות שקילות שונות. למה הוא מינימאלי? כי אם היה יחס שקילות U' המקיים $R \subseteq U' \subseteq U$ אז היה לו לכל היותר 6 מחלקות (בגלל ש $R \subseteq U'$ ומצד שני הוא מוכל ב U שיש לו בדיוק 6 מחלקות שקילות וכל שני איברים שמתייחסים זה לזה ב U' , מתייחסים זה לזה גם ב U ולכן $U' = U$ שזה מוכיח כי U מינימאלי. (באופן דומה כל "מיזוג" של שני מחלקות שונות ב T למחלקת שקילות אחת נתן יחס שקילות מינימאלי עם 6 מחלקות שקילות).

4. נגדיר פונקציה $f : P(P(\mathbb{N})) \rightarrow P(\mathbb{N})$ ע"י הכלל $f(S) = \bigcap_{X \in S} X$ (הערה: הסימון $P(*)$ הוא סימון שקבוצה החזקה של *).

(א) תהי $A = \{1, 2, 8, 9\}$. מצאו X_1, X_2 כך ש $f(X_1) = f(X_2) = A$ וגם $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. אם לא קיימים X_1, X_2 כאלה, הזינו $\{\}$ (למשתמשי XI. למשתמשי "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

פתרון: נגדיר

$$X_1 = \{A\}, X_2 = \{\{1, 2, 8, 9, 10\}, \{1, 2, 8, 9, 11\}\}$$

ונקבל כי $A = \{1, 2, 8, 9, 10\} \cap \{1, 2, 8, 9, 11\}$ ו $f(X_1) = A, f(X_2) = A$ ובנוסף $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ כנדרש.

(ב) מצאו כמה מקורות שונים יש לקבוצה $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ (ב XI ישנה אפשרות הזנת תשובה גם עבור אינסוף).

פתרון: יהא S מקור ל $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ אזי $f(S) = \bigcap_{X \in S} X = \mathbb{N} \setminus \{2\}$ ולכן לכל $X \in S$ מתקיים כי $\mathbb{N} \setminus \{2\} \subseteq X$ ישנן שתי קבוצות שמכילות את $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ והן $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ ולכן

$$S = \{\mathbb{N} \setminus \{2\}\}$$

או

$$S = \{\mathbb{N} \setminus \{2\}, \mathbb{N}\}$$

שתי אפשרות אלו הם מקור ל $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ והם שונות (כמובן ש $\{\}, \mathbb{N}$ לא מקורות של $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ ובזה כיסנו את כל הקבוצות ב $P(\{\mathbb{N} \setminus \{2\}, \mathbb{N}\})$ שהם הקבוצות האפשריות הבאות בחשבון בכלל. לכן התשובה הסופית פה היא 2.

חלק ב

5. תהא A קבוצה, נגדיר פונקציה $f : P(P(A)) \times P(P(A)) \rightarrow P(P(A))$ ע"י הכלל

$$f(X, Y) = \{C \Delta D \mid C \in X \wedge D \in Y\}$$

(א) הוכיחו כי לכל $X \subseteq P(A)$ מתקיים $|f(X, X)| \geq |X|$. אם $X = \emptyset$ אזי $|X| = 0$ שקטן שווה מכל עוצמה פתרון: הוכחה: תהא $X \subseteq P(A)$ צ"ל $|f(X, X)| \geq |X|$. אחרת, בפרט מ $|f(X, X)|$. אחרת, $X \neq \emptyset$ וקיים $C \in X$. נגדיר $g : X \rightarrow f(X, X)$ ע"י $g(D) = C \Delta D$ (לפי הגדרת f אכן מתקיים כי $C \Delta D \in f(X, X)$). נראה כי g חח"ע וזה יסיים את ההוכחה. אכן, נניח $g(C_1) = g(C_2)$ וצ"ל $C_1 = C_2$. מהגדרת g נקבל את השיוון

$$C_1 \Delta D = C_2 \Delta D$$

ומכיוון שהפרש סימטרי הוא קיבוצי נקבל ש

$$C_1 = C_1 \Delta \emptyset = C_1 \Delta (D \Delta D) = (C_1 \Delta D) \Delta D = (C_2 \Delta D) \Delta D = C_2 \Delta (D \Delta D) = C_2 \Delta \emptyset = C_2$$

כנדרש.

(ב) הוכיחו כי לכל $X \subseteq P(A)$ שאינה סופית מתקיים כי $|f(X, X)| = |X|$. פתרון: הוכחה: תהא $X \subseteq P(A)$ צ"ל $|f(X, X)| = |X|$ כיוון אחד הוכחנו בסעיף קודם. נוכיח את הכיוון השני (כלומר ש $|f(X, X)| \leq |X|$) ואז לפי ק.ש.ב יש שיוויון. נגדיר $g : X \times X \rightarrow f(X, X)$ ע"י $g((C, D)) = C \Delta D$ ואז לפי הגדרת f נקבל ש g על (יהא $E \in f(X, X)$ אז קיימים $C, D \in X$ כך ש $E = C \Delta D$ כלומר $E = g((C, D))$ ולכן

$$|f(X, X)| \leq |X \times X| = |X| \cdot |X| = \max\{|X|, |X|\} = |X|$$

כאשר השיוויון האמצעי נכון מכיוון ש X אינה סופית.

6. לכל n טבעי נגדיר יחס שקילות R_n על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י הכלל: $(f, g) \in R_n$ אם"מ $f^{-1}[\{n\}] = g^{-1}[\{n\}]$ (אין צורך להוכיח שאלו יחסי שקילות).

(א) נקבע $n = 1$. תהא $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ מצאו את עוצמת מחלקת שקילות. כלומר מצאו את $|[f]_{R_1}|$ (חלקו למקרים) פתרון: נגדיר $A = \mathbb{N} \setminus f^{-1}[\{1\}]$. ונגדיר $F : [f]_{R_1} \rightarrow (\mathbb{N} \setminus \{1\})^A$ ע"י שנגדיר את הפונקציה $F(g) = g|_A$. נשים לב שלכל $g \in [f]_{R_1}$ מתקיים כי $(f, g) \in R_1$ ולכן $f^{-1}[\{1\}] = g^{-1}[\{1\}]$ ולכן לכל

$$x \in A = \mathbb{N} \setminus f^{-1}[\{1\}] = \mathbb{N} \setminus g^{-1}[\{1\}]$$

מתקיים כי $1 \neq g(x)$ ולכן $g|_A$ אכן פונקציה מ A עם טווח $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. כעת נראה ש F חח"ע ועל. F חח"ע: נניח $F(g_1) = F(g_2)$ וצ"ל $g_1|_A = g_2|_A$. מההנחה נקבל כי $g_1|_A = g_2|_A$ ולכן לכל $x \in A$ מתקיים כי $g_1(x) = g_1|_A(x) = g_2|_A(x) = g_2(x)$. בנוסף, לכל $x \notin A$ מתקיים כי $x \in f^{-1}[\{1\}]$ מכיוון ש $g_1, g_2 \in [f]_{R_1}$ נקבל כי $(f, g_1), (f, g_2) \in R_1$ ולכן

$$x \in f^{-1}[\{1\}] = g_1^{-1}[\{1\}] = g_2^{-1}[\{1\}]$$

ולכן $g_1(x) = 1 = g_2(x)$. בסה"כ קיבלנו שלכל $x \in \mathbb{N}$ (בין אם $x \in A$ ובין אם $x \notin A$) מתקיים $g_1(x) = g_2(x)$ ולכן $g_1 = g_2$. F על: יהא $h \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})^A$. נגדיר $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ע"י

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & x \in A \\ 1 & x \in f^{-1}[\{1\}] \end{cases}$$

ומכיוון שלכל $x \in A$ מתקיים כי $h(x) \neq 1$ נקבל כי

$$g^{-1}[\{1\}] = \{x \in \mathbb{N} \mid g(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in f^{-1}[\{1\}]\} = f^{-1}[\{1\}]$$

ולכן $f^{-1}[\{1\}] = g^{-1}[\{1\}]$ ולכן $(f, g) \in R_1$ ולכן $g \in [f]_{R_1}$. בנוסף $F(g) = g|_A = h$ ולכן ל h יש מקור כנדרש.

מסקנה: $|[f]_{R_1}| = |(\mathbb{N} \setminus \{1\})^A| = |(\mathbb{N} \setminus \{1\})|^{|A|} = \aleph_0^{|A|}$. מכיוון ש $A \subseteq \mathbb{N}$ נקבל כי $|A| \leq \aleph_0$ ונוכל לחלק את התשובה הסופית כך:

- אם $|A| = \aleph_0$ נקבל כי $|A| = \aleph_0 = 2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$
 - אחרת $|A| < \aleph_0$ ואז $|A|$ סופית ונחלק:

* אם $1 \leq |A| < \aleph_0$ אז $|A| = \aleph_0^{|A|} = \aleph_0^{|A|}$

* אם $|A| = 0$ נקבל כי $|A| = \aleph_0^0 = 1$

(ב) נקבע $n = 1$. מצאו את עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1|$.

פתרון: נגדיר $f : P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י מיפוי של כל $B \in P(\mathbb{N})$ לפונקציה $F(B) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י

$$F(B)(n) = \begin{cases} 1 & n \in B \\ 2 & n \notin B \end{cases}$$

והיא מקיימת כי $F(B)^{-1}[\{1\}] = B$. כעת נראה כי $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1 = \{[F(B)]_{R_1} \mid B \in P(\mathbb{N})\}$ ובנוסף לכל $B_1, B_2 \in P(\mathbb{N})$ שונות מתקיים כי $[F(B_1)]_{R_1} \neq [F(B_2)]_{R_2}$. כמסקנה נקבל ש

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1| = |\{[F(B)]_{R_1} \mid B \in P(\mathbb{N})\}| = |P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

וזה מסיים את התרגיל.

- טענה: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1 = \{[f(B)]_{R_1} \mid B \in P(\mathbb{N})\}$ הוכחה: יהא $[f]_{R_1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1$ (עבור $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כלשהיא). נגדיר $B = f^{-1}[\{1\}]$ ואז $F(B)$ מקיימת כי $F(B)^{-1}[\{1\}] = B = f^{-1}[\{1\}]$ ולכן $(f, F(B)) \in R_1$ ולכן $[f]_{R_1} = [F(B)]_{R_1}$

- טענה: לכל $B_1, B_2 \in P(\mathbb{N})$ שונות מתקיים כי $[F(B_1)]_{R_1} \neq [F(B_2)]_{R_2}$ הוכחה: יהיו $B_1, B_2 \in P(\mathbb{N})$ שונות אזי $F(B_1)^{-1}[\{1\}] = B_1 \neq B_2 = F(B_2)^{-1}[\{1\}]$ ולכן $(F(B_1), F(B_2)) \notin R_1$ ולכן $[F(B_1)]_{R_1} \neq [F(B_2)]_{R_2}$

(ג) תהי $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. הוכיחו: מתקיים $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [f]_{R_n} = \{f\}$.

פתרון: כיוון שלכל n טבעי מתקיים כי R_n יחס שקילות הוא בפרט רפלקסיבי ובפרט $(f, f) \in R_n$ ולכן $f \in [f]_{R_n}$ ולכן $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [f]_{R_n}$. זה מוכיח כי $\{f\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [f]_{R_n}$ תהא $g \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [f]_{R_n}$ ונראה כי $g = f$. מהגדרה החיתוך נקבל שלכל n מתקיים $g \in [f]_{R_n}$ ולכן $(f, g) \in R_n$ ולכן $f^{-1}[\{n\}] = g^{-1}[\{n\}]$. יהא x טבעי ונראה ש $f(x) = g(x)$. אכן נסמן $n = f(x)$ ונקבל כי $x \in f^{-1}[\{n\}]$ ומכיוון ש $f^{-1}[\{n\}] = g^{-1}[\{n\}]$ נקבל כי $x \in g^{-1}[\{n\}]$ ולכן $g(x) = n = f(x)$ ולכן g כנדרש.

(ד) הוכיחו/הפריכו: קיימת f כך שלכל n טבעי מתקיים $\bigcap_{k=1}^n [f]_{R_k} \neq \{f\}$

פתרון: נוכיח שעבור $f = I_{\mathbb{N}}$ מתקיים שלכל n טבעי מתקיים כי $\bigcap_{k=1}^n [f]_{R_k} \neq \{f\}$. הוכחה: יהא n טבעי ונגדיר $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ע"י

$$g(x) = \begin{cases} x & 1 \leq x \leq n \\ n+1 & n+1 \leq x \end{cases}$$

ואז לכל $1 \leq k \leq n$ מתקיים כי

$$g^{-1}[\{k\}] = k = I_{\mathbb{N}}^{-1}[\{k\}]$$

ולכן לכל $1 \leq k \leq n$ מתקיים כי $(I_{\mathbb{N}}, g) \in R_k$ ולכן $g \in \bigcap_{k=1}^n [I_{\mathbb{N}}]_{R_k}$ ולכן $\{I_{\mathbb{N}}, g\} \subseteq \bigcap_{k=1}^n [I_{\mathbb{N}}]_{R_k}$ ומכיוון ש $g \neq I_{\mathbb{N}}$ נקבל בפרט $\bigcap_{k=1}^n [I_{\mathbb{N}}]_{R_k} \neq \{I_{\mathbb{N}}\}$ כנדרש.

(ה) תהינה $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך שלכל $2 \leq n$ טבעי מתקיים כי $(f, g) \in R_n$. הוכיחו/הפריכו: $f = g$.

פתרון: הוכחה: יהא x טבעי ונראה כי $f(x) = g(x)$. נסמן $n = f(x)$.

אם $2 \leq n$ נקבל ש $x \in f^{-1}[\{n\}]$ ומכיוון ש $(f, g) \in R_n$ נקבל כי $f^{-1}[\{n\}] = g^{-1}[\{n\}]$ ולכן $x \in g^{-1}[\{n\}]$ ולכן $g(x) = n = f(x)$ וסיימנו.

אחרת, $n = 1$ וצ"ל כי $g(x) = 1$. נב"ש כי $g(x) \neq 1$ אזי קיים $2 \leq n$ כך ש $g(x) = n$ ולכן $x \in g^{-1}[\{n\}]$ ומכיוון ש $2 \leq n$ נקבל ש $(f, g) \in R_n$ ולכן $f^{-1}[\{n\}] = g^{-1}[\{n\}]$ ולכן $x \in f^{-1}[\{n\}]$ ולכן $f(x) = n = g(x)$ אבל $f(x) = 1$ ולכן $n = 1$ (כי f פונקציה ובפרט חד-ערכית) סתירה.

במידה ותבחרו להגיש את חלק ב לבדיקה, ייתכן שתזמונו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על חלק ב").

במידה ותבחרו לא להגיש את חלק ב לבדיקה, תקבלו עליה 14 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על חלק ב").