תזכורת: יש לנו יריעה ב$\mathbb{R}^3$ ומפה r, וע"י היעקוביאן $\mathrm{d}r$ יש לנו מיפוי לווקטורים המשיקים. המטריצה $g = \mathrm{d}r^t \mathrm{d}r$ מאפשרת לנו להכפיל שני וקטורים על המפה במקום לתרגם אותם ליריעה. יש גם את מיפוי הנורמל מהיריעה לספירת היחידה, ומיפוי משעון לתוך המפה שנותן לנו מסילה γ.

גילינו שאם אנחנו מסתכלים על $r_{i\prime j}$(הנגזרת לפי הכיוון האמיתי), אז מתקיים $r_{i\prime j} = \Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij}\hat{n}$, כאשר (b_{ij}) היא התבנית היסודית השנייה וΓ_{ij}^k הם סמלי כריסטופל. זה אומר לנו איך היריעה משתנה לפי תנועה עליה.

מכפלה פנימית: $\langle u,v\rangle = g_{ij}u^i v^j$.

ניתן לחשב את סימני כריסטופל ישירות:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il}\left(g_{lj\prime k} + g_{kl\prime j} - g_{jk\prime l}\right)$$

אופרטור הצורה: $S = g^{-1}b$. עקמומיות גאוס: $K = \kappa_1\kappa_2 = \det S = \frac{\det b}{\det g}$.

עקמומיות גאוס, על פניה, נראית מאוד תלויה באיך העקומה הוכנסה ל$\mathbb{R}^3$, אבל גאוס גילה שלמעשה כל מה שצריך לדעת כדי לחשב את עקמומיות גאוס זה את המטריקה. כלומר גם ממדידות על פני השטח של כדור הארץ אפשר להסיק שכדור הארץ הוא כדור(כלומר בעל עקמומיות קבועה), ולא צריך להסתכל מבחוץ. גאוס מאוד הופתע מהתגלית הזו, וקרא לה "theorema egregium" - התגלית המפתיעה. בעצם זה אומר שעקמומיות גאוס היא תכונה פנימית - בניגוד לעקמומויות הראשיות ולעקמומיות הממוצעת.

משפט

עקמומיות גאוס ניתנת לביטוי בעזרת רכיבי התבנית היסודית הראשונה בלבד.

הוכחה

$$K = \frac{\det B}{\det G} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\det g}$$

$$b_{ij} = \frac{\det\left((r_i)\,(r_j)\,(r_{ij})\right)}{\sqrt{\det g}}$$

$$K = \frac{1}{\det(g)^2}\left((r_{11}, r_{22}, r_2)(r_{22}, r_1, r_2) - (r_{12}, r_1, r_2)^2\right) = \cdots$$

(כל שלשה כזאת (u,v,w) היא דטרמיננטה - $\begin{vmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{vmatrix}$)

$$\cdots = \frac{1}{\det(g)^2}\left(\det\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} r_{22} \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{(\det g)^2}\left(\det\begin{pmatrix} r_{11}\\ r_1\\ r_2\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} r_{22}\\ r_1\\ r_2\end{pmatrix}^t - \det\begin{pmatrix} r_{12}\\ r_1\\ r_2\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} r_{12}\\ r_1\\ r_2\end{pmatrix}^t\right) =$$

$$= \frac{1}{(\det g)^2}\left(\det\left(\begin{pmatrix} r_{11}\\ r_1\\ r_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{22}\\ r_1\\ r_2\end{pmatrix}^t\right) - \det\left(\begin{pmatrix} r_{12}\\ r_1\\ r_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{12}\\ r_1\\ r_2\end{pmatrix}^t\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{(\det g)^2}\left(\det\begin{bmatrix} \langle r_{11}, r_{22}\rangle & \langle r_{11}, r_1\rangle & \langle r_{11}, r_2\rangle\\ \langle r_1, r_{22}\rangle & \langle r_1, r_1\rangle & \langle r_1, r_2\rangle\\ \langle r_2, r_{22}\rangle & \langle r_2, r_1\rangle & \langle r_2, r_2\rangle\end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} \langle r_{12}, r_{12}\rangle & \langle r_{12}, r_1\rangle & \langle r_{12}, r_2\rangle\\ \langle r_1, r_{12}\rangle & \langle r_1, r_1\rangle & \langle r_1, r_2\rangle\\ \langle r_2, r_{12}\rangle & \langle r_2, r_1\rangle & \langle r_2, r_2\rangle\end{bmatrix}\right) = \cdots$$

דטרמיננה היא לינארית בכל עמודה, ולכן ניתן לפרק:

$$\cdots = \frac{1}{(\det g)^2}\left(\begin{array}{c} \det\begin{pmatrix} \langle r_{11}, r_{22}\rangle & \langle r_{11}, r_1\rangle & \langle r_{11}, r_2\rangle\\ 0 & g_{11} & g_{12}\\ 0 & g_{12} & g_{22}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & \langle r_{11}, r_1\rangle & \langle r_{11}, r_2\rangle\\ \langle r_1, r_{22}\rangle & g_{11} & g_{12}\\ \langle r_2, r_{22}\rangle & g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}\\ - \det\begin{pmatrix} \langle r_{12}, r_{12}\rangle & \langle r_{12}, r_1\rangle & \langle r_{12}, r_2\rangle\\ 0 & g_{11} & g_{12}\\ 0 & g_{12} & g_{22}\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \langle r_{12}, r_1\rangle & \langle r_{12}, r_2\rangle\\ \langle r_1, r_{12}\rangle & g_{11} & g_{12}\\ \langle r_2, r_{12}\rangle & g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}\end{array}\right) =$$

$$= \frac{1}{\det g}\left(\langle r_{11}, r_{22}\rangle\right) + \frac{1}{(\det g)^2}\left(\det\begin{bmatrix} 0 & \langle r_{11}, r_1\rangle & \langle r_{11}, r_2\rangle\\ \langle r_1, r_{22}\rangle & g_{11} & g_{12}\\ \langle r_2, r_{22}\rangle & g_{12} & g_{22}\end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 0 & \langle r_{12}, r_1\rangle & \langle r_{12}, r_2\rangle\\ \langle r_1, r_{12}\rangle & g_{11} & g_{12}\\ \langle r_2, r_{12}\rangle & g_{12} & g_{22}\end{bmatrix}\right)$$

נגדיר $\Gamma_{ij\prime k} = \langle r_{ij}, r_k\rangle$. נשים לב ש:

$$I)\qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u_k}\langle r_i, r_j\rangle = \langle r_{ik}, r_j\rangle + \langle r_i, r_{jk}\rangle$$

$$II)\qquad \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i}\langle r_j, r_k\rangle = \langle r_{ji}, r_k\rangle + \langle r_j, r_{ki}\rangle$$

$$III)\qquad \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j}\langle r_k, r_i\rangle = \langle r_{kj}, r_i\rangle + \langle r_k, r_{ij}\rangle$$

נחבר: $I + II + III$ לקבל:

$$\partial\langle r_{ij}, r_k\rangle = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

$$\Gamma_{ij\prime k} = \frac{1}{2}\left(g_{ki\prime j} + g_{jk\prime i} - g_{ij\prime k}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{11\prime 2} = \frac{\partial}{\partial u^2}\langle r_{11}, r_2\rangle = \langle r_{121}, r_2\rangle + \langle r_{12}, r_{12}\rangle$$

$$\langle r_{12}, r_{22}\rangle - \langle r_{12}, r_{12}\rangle = \frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{11\prime 2} - \frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{12\prime 2}$$

$$K = \frac{1}{\det g}\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{11/2} - \frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{12/2}\right) + \frac{1}{(\det g)^2}\left(\det\begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{11/1} & \Gamma_{11/2} \\ \Gamma_{22/1} & g_{11} & g_{12} \\ \Gamma_{22/2} & g_{12} & g_{22}\end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{12/1} & \Gamma_{12/2} \\ \Gamma_{12/1} & g_{11} & g_{12} \\ \Gamma_{12/2} & g_{12} & g_{22}\end{bmatrix}\right)$$

■

מסקנה

אופרטור הצורה הוא תכונה חיצונית, אבל עקמומיות גאוס, למרות שהיא מחושבת מאופרטור הצורה, היא תכונה פנימית.

מערכת קואורדינטות גאודזיות מקבילות

כזכור, יש שתי הגדרות שקולות לקוים הגאודזיים שמהן מגיעים לאותה משוואה $\ddot{\gamma}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$.

נסמן ע"י u^2 את הפרמטר הטבעי לאורך קו גאודזי כך ש$a = \gamma\left(u^2 = 0\right)$.

בהנתן 2 פרמטרים $\left(u^1, u^2\right)$ נבצע את הפעולה הבאה על מנת למצוא את $\gamma\left(u^1, u^2\right)$: נמצא את הנקודה על העקום γ המרוחקת מרחק u^2 מהנקודה a ולאחר מכן נוציא ממנה קו גאודזי המאונך לγ ונתקדם לאורכו מרחק $\left(u^1\right)$. הכיוון יוגדר ע"י הסימן של u^1.

מובן ש$1 = \left\|\frac{\partial r}{\partial u_1}\right\| = \|r_1\|$. כמו כן r_1, r_2 מאונכים על γ - כלומר $\left.\langle r_1, r_2\rangle\right|_{u_1=0} = 0$. נגזור לפי u_1 לקבל:

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\langle r_1, r_2\rangle = \langle r_{11}, r_2\rangle + \langle r_1, r_{21}\rangle$$

r_{11} הוא התאוצה של קו גאודזי ולכן הוא מאונך למישור המשיק ולכן

$$\langle r_{11}, r_2\rangle = 0$$

כלומר המחובר הראשון מתאפס. $g_{11} = 1$ כי מכפילים וקטורים לאורך עקומה גיאוזית בפרמטריזציה טבעית.

$$0 = \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2}\langle r_1, r_2\rangle = 2\langle r_{12}, r_1\rangle \implies \langle r_{12}, r_1\rangle$$

כלומר גם המחובר השני מתאפס.

$$\implies \frac{\partial}{\partial u^1}\langle r_1, r_2\rangle = 0 \implies \langle r_1, r_2\rangle = 0$$

לכל נקודה - כלומר הרכיבים הלא אלכסוניים של המטריקה מתאפסים - $g_{12} = g_{21} = 0$.

נשאר לנו רק איבר אחד - g_{22}. אם הוא היה 1 היה לנו מישור - אבל זה לא תמיד מישור. כלומר יש לנו איבר אחד לא טריוויאלי שנסמנו בh:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h\end{pmatrix}$$

וזה אומר ש

$$\det g = h$$

כמו כן, על העקומה המקורית γ g היא מטריצת היחידה:

$$\det g|_{u^1=0} = 1$$

שכן

$$\left.\frac{\partial \det g}{\partial u^1}\right|_{u_1=0} = \left.\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right|_{u^1=0} = 2\left\langle r_{12}, r_2\right\rangle|_{u^1} = 0$$

משפט גאוס בונה Gauss Bonnet

הגדרה - זוית סיבוב מעודנת ביחס למשטח

נגדיר 2 שדות וקטוריים על המשטח(או סביבה של נקודה במשטח) v, w, כך ש(v, w) מהוה בסיס אורתונורמלי עם אוריינטציה קבועה בכל נקודה בסביבה.

לכל שדה וקטורי x ניתן להגדיר זוית $\alpha : M \to [0, 2\pi)$ כך ש:

$$x\left(P\right) = v\cos\alpha\left(P\right) + w\sin\alpha\left(P\right)$$

כעת ניתן לדבר על שינוי זוית של עקומה:

$$\alpha\left(b\right) - \alpha\left(a\right)\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s$$

משפט

יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח רגולרי קומפקטי אוריינטבילי. נניח שהשפה ∂M אינה ריקה ומורכבת מעקומים חלקים למקוטעין. אזי זוית הסיבוב המעודנת מיחס לM שווה לאינטגרל על עקמומיות גאוס:

$$\theta\left(M\right) = \iint_M K\,\mathrm{d}S$$

הוכחה

נניח שהיריעה מכוסה ע"י מידה בודדת וכן שהמטריקה נתונה ע"י $\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}r_1^2 + h^2\,\mathrm{d}r_2^2$. נגדיר:

$$v = r_1 \qquad w = \frac{r_2}{h}$$

יהי x_i שדה משיק לM. אזי:

$$x_i(t) = \cos\alpha_i(t)\, v(\gamma_i(t)) + \sin\alpha_i(t)\, w(\gamma_i(t)) = \cos\alpha_i(t)\, r_1 + \frac{\sin\alpha_i(t)}{h} r_2$$

נניח γ_i חלק:

$$\Gamma^1_{11} = 0 \qquad \Gamma^1_{12} = 0 \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}\left(h^2\right)_1$$

מקבלים:

$$-\sin\alpha_i \cdot \alpha_i'(t) - \frac{1}{2}\left(h^2\right)_1 u_2' \cdot \frac{1}{h}\sin\alpha_i(t) = 0$$

כלומר:

$$\alpha_i'(t) = -\frac{\partial}{\partial u_1} h u_2'(t)$$

ומכאן

$$\theta_i = \alpha(b) - \alpha(a) = \int_a^b \alpha_i'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\partial_i v} \frac{\partial h}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_2$$

כאשר $\partial_i v$ הוא רכיב הקשירות הi של השפה.

$$\theta(M) = \sum_{i=1}^{2} \theta_i = -\int_{\partial U} \frac{\partial 2h}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_2$$

נשתמש במשפט סטוקס/גרין:

$$\int_{\partial U} (P\,\mathrm{d}u_1 + Q\,\mathrm{d}u_2) = \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial u_1} - \frac{\partial P}{\partial u_2}\right)\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2$$

במקרה שלנו $Q = \frac{2h}{2u_1}$ $\qquad P = 0$ ונשים לב ש$h = \sqrt{g}$. נקבל:

$$\theta = -\iint_U \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} h\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2$$

ידוע $\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} h = -K\sqrt{g}$, ולכן

$$\theta(M) = \iint_U K\sqrt{g}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 = \iint_M K\,\mathrm{d}S$$

מסקנה 1

במשולש גאודזי סכום הזויות הוא $\pi + \iint_\Delta K\,\mathrm{d}S$.

משפט גאוס בונה

עבור יריעה קומפקטית ללא גבול,

$$\iint_M K\,\mathrm{d}S = 2\pi\chi\left(M\right)$$

כאשר χ הוא מאפיין אוילר־פוונקרה ־ מחלקים משטח למשולשים וסופרים את מספר הצלעות פחות מספר הצלעות ועוד מספר הקודקודים($F - E + V$). עבור כדור זה נותן 2, עבור טורוס זה נותן 0 ־ זוהי תכונה שקשורה לטופולוגיה בלבד, לא למבנה הגיאומטרי, ותמיד $\chi \leq 2$.

בעצם זה אומר שסה"כ העקמומיות על גוף היא מוגבלת.