הגדרה

סדרה נורמלית שאין לה עידון ממש נקראת סדרת הרכב.

טענה 1

סדרה נורמלית היא סדרת הרכב אם"ם כל הגורמים שלה חב' פשוטות.

הוכחה הוכחנו בשעור שעבר.

עובדה 1

לכל חבורה סופית יש סדרת הרכב.

הוכחה תרגיל

עובדה 3

לחבורה איסופית אין בהכרח סדרת הרכב.

דוגמה

$$\mathbb{Z} \rhd 2\mathbb{Z} \rhd 4\mathbb{Z} \rhd 8\mathbb{Z} \rhd ... \rhd 2^k\mathbb{Z} \rhd ...$$

הגדרה

שתי סדרות נורמליות של חב' G נקראות <u>שקולות</u> אם הגורמים שלהן איזומורפיים עד כדי סדר הגורמים.

במילים אחרות

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd ... \rhd G_k = \{e\}$$

$$G = H_0 \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd ... \rhd H_t = \{e\}$$

סדרות שקולות של G אם $k = t$ ויש תמורה $\pi \in S_k$ כך שלשל $0 \le i \le k$ $\mathrm{G_i}/\mathrm{G_{i+1}} \cong \mathrm{H}_{\pi(\mathrm{i})}/\mathrm{H}_{\pi(\mathrm{i})+1}$

דוגמה

$$G=\mathbb{Z}_{30}$$

$$\mathbb{Z}_{30}\rhd\langle 2\rangle\lhd\langle 10\rangle\lhd\{0\}$$

גורמים: $\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_5,\mathbb{Z}_3$ כולם פשוטים

$$\mathbb{Z}_{30}\lhd\langle 3\rangle\lhd\langle 15\rangle\lhd\{0\}$$

גורמים:$\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_5,\mathbb{Z}_2$ כולם פשוטים

משפט שרייאר

לכל שתי סדרות נורמליות של חב' G קיימים עידונים שקולים.

רעיון ההוכחה

למת זסנהאוס: תהא G חב', $N_1\trianglelefteq H_1\leq G$, $N_2\trianglelefteq H_2\leq G$. אז:

$$N_1\left(H_1\cap N_2\right)\trianglelefteq N_1\left(H_1\cap H_2\right)\qquad (i)$$

$$N_2\left(H_2\cap N_1\right)\trianglelefteq N_2\left(H_1\cap H_2\right)\qquad (ii)$$

$$\mathrm{N_1(H_1\cap H_2)}/\mathrm{N_1(H_1\cap N_2)}\cong\mathrm{N_2(H_1\cap H_2)}/\mathrm{N_2(H_2\cap N_1)}\qquad (iii)$$

בעזרת למת זסנהאוס ומשפטי איזומורפיזם(בפרט II) מוכיחים את משפט שרייאר.
מראים:

$$e\lhd N_1\cap N_2\lhd N_2\lhd N_2\left(H_2\cap N_1\right)\lhd N_2\left(H_2\cap H_1\right)\lhd H_2\lhd G$$

שקול לאותה סדרה עם החלפת תפקידי 1 ו2.

מסקנה - משפט ג'ורדן

אם לG יש סדרת הרכב אז כל סדרות ההרכב של G שקולות.

הוכחה

נתבונן בשתי סדרות הרכב של G.

- אם הן זהות סיימנו.
- אם הם שונות, מכיוון שהן סדרות הרכב, הן בפרט סדרות נורמליות. לכן, לפי משפט שרייאר, יש להן עידונים שקולים. מכיוון שהן סדרות הרכב, העידון היחיד שלהן הוא הן עצמן, ולכן הן שקולות.

$\blacksquare$

חבורות פתירות

הגדרה

חבורה G היא פתירה אם יש לה סדרה נורמלית שכל גורמיה חבורות אבליות.

דוגמאות

(א) G אבלית. $G \rhd \{e\}$

(ב) החבורה הדיהדרלית

$$I_2(n) = \left\langle s, t : s^n = e, t^2 = 1, tst = s^{-1} \right\rangle$$

s סיבוב ב-$\frac{2\pi}{n}$, t שיקוף.

$$I_2(n) \rhd \langle s \rangle \rhd \{e\}$$

הגורמים: $^{I_2(n)}/_{\langle s \rangle} \cong \mathbb{Z}_2$ כי $2 = \frac{|I_2(n)|}{|\langle s \rangle|}$. $^{\langle s \rangle}/_{\{e\}} \cong \mathbb{Z}_n$ כי כל הגורמים שקולים.

(ג) חבורות סימטריה.

1. S_2 אבלית לכן פתירה.
2. $S_3 \rhd A_3 \rhd \{e\}$, גורמים $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ - לכן S_3 פתירה.
[אבל, הערה: $S_3 \cong I_2(3)$. תרגיל: הוכח]
3. S_4. סדרה נורמלית: $S_4 \rhd A_4 \rhd V_4 \rhd \{e\}$. גורמים: $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, V_4$ כולם אבליים. לכן S_4 פתירה.
4. $5 \leq n$.

טענה: S_n אינה פתירה עבור $5 \leq n$.

הוכחה: לפי משפט תח"נ יחידה שאינה טריוויאלית של S_n עבור $5 \leq n$ היא A_n. לכן כל סדרה נורמלית של S_n האיבר השני הוא כל מי ששיחק קצת עם התרגיל ופספס קצת באינדקסים, ראה שמתקבלות תמונות שונות ו....מעניינות מאד. בנוסף (!!) לקוד שמבצע את הפעולות הנדרשות בצורה תקינה, אתם רשאים לשלוח את התמונה היפה שקיבלתם. צוות הקורס + הבודק יבחרו את התמונה המנצחת והאומן המוכשר יזכה בתוספת של 5 נקודות בונוס לתרגיל.A_n. כמו כן, לפי משפט, A_n, עבור $5 \leq n$, חבורה פשוטה. לכן האיבר השלישי בסדרה הוא בהכרח $\{e\}$.

מסקנה: סדרה נורמלית של S_n היא $S_n \triangleright \{e\}$ הוא $S_n \triangleright A_n \triangleright \{e\}$ ואין אחרות. בשתיהן יש גורם לא אבלי, ולכן S_n אינה פתירה. ■

הערה:

למה: אם יש לG סדרת הרכב, אזי G פתירה אם"ם כל גורמי סדרת ההרכב אבליים.

הוכחה: אם כל גורמי סדרת ההרכב אבליים, אזי G פתירה, לפי הגדרת פתירות. ולהיפך, אם G פתירה, אזי יש לה סדרה נורמלית שכל גורמיה אבליים. מכיוון שיש לG סדרת הרכב, אז יש לG עידון של הסדרה הנ"ל(שכל גורמיה אבליים) השקול לסדרת ההרכב. אם כל הגורמים של סדרה אבליים, אז כל הגורמים של עידון של ג"כ אבליים(כי חב' מנה של חב' אבלית היא אבלית), ולכן יש לG סדרת הרכב שכל גורמיה אבליים. לפי משפט ג'ורדן-קולדר, לכל סדרות הרכב אותה קבוצת גורמים. ■

מטרה

מציאת קריטריון לפתירות חבורה.

תת נושא הבא: ת"ח הקומוטטור

הגדרה וסימון

תהא G חבורה, $a, b \in G$. הקומוטטור של a וb הוא $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$

עובדה 1

לכל חב' G, $a, b \in G$, $[a, b] = e$ אם"ם $ab = ba$ (a וb מתחלפים)

המשך הגדרה וסימון

תהא G חבורה. ת"ח הקומוטטור היא

$$G' := \langle \{[a, b] : a, b \in G\} \rangle$$

כלומר, ת"ח הנוצרת ע"י כל הקומוטטורים של 2 איברים.

טענה 2

לכל חב' G, $G' = \{e\}$ אם"ם G אבלית.

הוכחה

אם G אבלית, לפי עובדה 1 לכל $a,b\in G$, $[a,b]=e$ ולכן $G'=\langle e\rangle$.
ולהיפך: אם $G'=\langle e\rangle$ אז כל הקומוטטורים שווים בהכרח ל-e, ולכן, לפי עובדה 1, כל זוגות האיברים a,b מתחלפים.

■

משפט 3

לכל חב' G, $G'\trianglelefteq G$.

הוכחה

ט.ע. 1: לכל $g,a,b\in G$, $g\,[a,b]\,g^{-1}=[ga,b]\,[b,g]$

הוכחת ט.ע: $[ga,b]\,[b,g]=gaba^{-1}g^{-1}b^{-1}bgb^{-1}g^{-1}=gaba^{-1}b^{-1}g^{-1}=g\,[a,b]\,g^{-1}$.
מש"ל ט.ע.

ט.ע. 2: לכל $a,b\in G$, $[a,b]^{-1}=[b,a]$

הוכחת ט.ע. 2: השלם.

לכל $x\in G'$
[תזכורת: לכל חבורה G, $A\subseteq G$, $x\in\langle A\rangle$ אם"ם x מכפלה מאורך סופי של איברי A והופכיהם.]
לכן, לכל $x\in G'$ קיים m סופי ואיברים $\begin{matrix}a_1,a_2,...a_m\in G\\ b_1,b_2,...b_m\in G\end{matrix}$ כך ש $x=[a_1,b_1]\,[a_2,b_2]\cdots[a_m,b_m]$ (ונזכור שלפי ט.ע. 2 ההפכי של קומוטטור הוא קומוטטור בעצמו).
כדי להראות $G'\trianglelefteq G$ מ"ל לכל $x\in G'$ ולכל $g\in G$ $gxg^{-1}\in G'$

$$gxg^{-1}=g\,[a_1,b_1]\,[a_2,b_2]\cdots[a_m,b_m]\,g^{-1}=$$

$$=g\,[a_1,b_1]\,g^{-1}g\,[a_2,b_2]\,g^{-1}\cdots g\,[a_m,b_m]\,g^{-1}=$$

$$=[ga_1,b_1]\,[b_1,g]\cdots[ga_m,b_m]\,[b_m,g]\in G'$$

מסקנה 4

אם G חב' פשוטה שאינה אבלית אז $G'=G$.

הוכחה

על פי משפט 3 $G' \trianglelefteq G$. מכיוון שG פשוטה, $G' \in \{\{e\}, G\}$. על פי טענה 2 $G' = \{e\}$ אס"ם G אבלית. מכיוון שG אינה אבלית, $G' = G$.

■

דוגמה

עבכור $5 \leq n$, $(A_n)' = A_n$

תרגיל 5

אם $H \leq G$ אז $H' \leq G'$

טענה 6

לכל חבורה G, ${}^{G}/{}_{G'}$ אבלית.