הרצאה 26

הלמה של בראואר יהי R חוג, יהי $I \leq R$
אידיאל שמאלי מינימלי ($I \neq (0)$, לא קיים $(0) \subsetneq J \subsetneq I$).
נניח כי $I^2 \neq (0)$. אזי קיים $e \in I$ כך ש-

1) $e^2 = e$

2) $I = Re$

3) eRe הינו חוג עם חילוק

(eRe הינו חוג עם איבר יחידה e)

$eRe = \{ere : r \in R\}$

הוכחה בפעם הקודמת הוכחנו 1), 2).
נשאר להוכיח כי eRe הינו חוג עם חילוק. אזי יהי $0 \neq a \in eRe = eI \subseteq I$
לכן Ra אידיאל שמאלי של R,
$(0) \neq Ra \subseteq I \Rightarrow Ra = I \Rightarrow$ קיים $r \in R$
כך ש- $ra = e$. נשים לב כי r לא
בהכרח מוכל ב- eRe. אבל $a \in eRe \Rightarrow$

$a=ebe$ עבור $b\in R$ מתאים, לכן

$$(ere)a = ere\cdot ebe = erebe = era = e^2 = e,$$

אנחנו צריכים להוכיח גם כי $a(ere)=e$.

עכשיו הוכחנו שלכל איבר של eRe יש הפכי
משמאל ב-eRe. בפרט, גם ל-ere יש הפכי
משמאל $x\in eRe$, כלומר $xere=e$.
אז

$a=ea=xerea=xe=x$, לכן
גם $a(ere)=e$, ולכן eRe הינו חוג עם חילוק.

<u>משפט</u> (Wedderburn) יהי R חוג פשוט (ללא
אידיאלים דו-צדדיים מלבד $(R,(0)$. נניח
כי ל-R יש אידיאל שמאלי מינימלי I.
אזי $R\cong M_n(D)$ כאשר $n\in\mathbb{N}$, D חוג עם חילוק

<u>הערה</u> יהי R חוג פשוט. אזי ל-R יש אידיאל
שמאלי מינימלי $\Leftarrow R$ ארטיני משמאל.

הוכחה של משפט Wedderburn: יהי R חוג פשוט,

יהי I אידיאל שמאלי מינימלי. אז

$$I \subseteq IR = \{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n : a_i \in I,\ b_i \in R\}$$

הינו אידיאל דו-צדדי של R. אז R פשוט,

לכן $IR = R$ לכן,

$$R = RR = I\underline{RI}R = IIR = I^2R$$

$RI = I$ כי I אידיאל שמאלי.

ובפרט, $I^2 \neq (0)$, לכן ניתן להשתמש בלמה של Brauer, וקיים $e \in I$ כך ש-

$$e^2 = e$$
$$I = Re$$

$D = eRe$ הינו חוג עם חילוק,

ראשית נשים לב כי $D \subseteq I$. לכן יש ל-I מבנה של D-מודול: לכל $d \in D$, $a \in I$,

נגדיר כפל סקלרי $a \cdot d = ad \in I$.

יהי $End_D(I)$ החוג של ההומומורפיזמים $f: I \to I$ של D-מודולים ימניים. (כפל = הרכבה)

לכל $r \in R$, נגדיר $\alpha_r \in End_D(I)$.

$$\alpha_r(a) = ra \in I$$

זו הומו' של חבורות $\alpha_r(a+b) = r(a+b) = ra+rb$.

זו הומו' של D-מודולים ימניים כי

$$\alpha_r(ad) = rad = (\alpha_r(a)) \cdot d.$$

אז מקבלים העתקה $f: R \to End_D(I)$

$$f(r) = \alpha_r$$

~~מה-טענה~~ f הינו איזומורפיזם של חוגים.

<u>מה-הוכחה</u> f הומו' כי $\alpha_{r+s}(a) = (r+s)a =$

$$ra + sa = \alpha_r(a) + \alpha_s(a)$$

לכן $\alpha_{r+s} = \alpha_r + \alpha_s$ לכל $r,s \in R$, לכן

$f(r+s) = f(r) + f(s)$.

כמו כן

$$\alpha_{rs}(a) = rsa = \alpha_r(\alpha_s(a))$$

$$f(rs) = f(r) \cdot f(s).$$

ברור כי $\alpha_1 = id$.

f חח"ע יהי $r\in \ker f$. אזי $\alpha_r=0 \Leftarrow$

$ra=0$ לכל $a\in I$, לכן אומנו כי

$$rI=0$$

$$r=r\cdot 1\in rR=rIR=0$$

לכן $r=0$. לכן f חח"ע.

כאן צריכים פשטות של R.

f על ידוע לכן כי $1\in R=IR=ReR$.

בפרט, $r_i,s_i\in R$, $1=\sum_{i=1}^{n} r_i e s_i$.

יהי $\alpha\in End_D(I)$. לכל $re\in I$ $(r\in R)$,

$$\alpha(re)=\alpha(1\cdot re)=\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} r_i e s_i re\right)=$$

$$\alpha\Big(\sum_{i=1}^{n}\underbrace{r_i e}_{\in I}\cdot\underbrace{es_i re}_{\in eRe=D}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\alpha(r_i e)\cdot es_i re$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha(r_i e)\cdot es_i\right)re=\alpha_x(re)$$

כאשר $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha(r_i e)\cdot es_i\in R$.

לכן הוכחנו $R\cong End_D(I)$,

<u>תת-טענה</u> יהי D חוג עם חילוק, כל D-מודול הינו חופשי.

<u>תת-הוכחה</u> יהי M D-מודול (ימני). לפי הלמה של צורן קיימת קבוצה בת"ל מקסימלית S. צריך להוכיח כי S פורשת את M. נניח שקיים $v\notin span(S)$, לפי המקסימליות של S, הקבוצה $S\cup\{v\}$ לא בת"ל $\Leftarrow$

$$v\alpha + s_1\alpha_1 + \dots + s_n\alpha_n = 0$$

$$v = -s_1\alpha_1\alpha^{-1} - \dots - s_n\alpha_n\alpha^{-1}$$

בסתירה להנחה $v\notin span(S)$. כאן השתמשנו רק בכך שאפשר לחלק ב-D, אותה הוכחה כמו בלינארית.

חוזרים להוכחה של Wedderburn.

<u>תת-טענה</u> I נוצר סופית מעל D.

<u>תת-הוכחה</u> נניח שלא, אזי

$J = \{\alpha \in End_D(I) :$ נוצרת סופית מעל D $\alpha(I)$ $\}$

הינו אידיאל דו-צדדי של $End_D(I)$.

החוג הינו פשוט, $id \in J$ $\Leftarrow$ $J=(0)$.

כי ואכן, ניקח הטלה על תת-מרחב חד-מימדי!

לכן ל-I יש בסיס סופי מעל D,

$$End_D(I) \longleftrightarrow M_n(D)$$

יהי $b_1,\dots,b_n$ בסיס.

$$\alpha \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \alpha(b_1) \\ \hline \alpha(b_2) \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha(b_n) \end{array} \right)$$

כי נזין איזו של חוגים $R \cong End_D(I) \cong M_n(D)$.

<u>הערה:</u> יש חוגים פשוטים שאינם ארטיניים משמאל.

<u>דוגמא:</u> האלגברה של וייל.

$$R = \mathbb{R}\langle x,\partial\rangle \big/ \partial x = x\partial + 1$$

יש לנו R-מודול טבעי

יהי $C^\infty = M = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חלקות $\}$ פונקציות

$$x\cdot f = xf$$
$$\partial\cdot f = f'$$

$$(\partial x)\cdot f = (xf)' = f + xf' = (1+x\partial)\cdot f$$

אם נשתמש ביחס $\partial x = x\partial+1$, נראה

שניתן להציג כל $p\in R$ באופן יחיד

כסכום של מונומים מן הצורה $a x^m \partial^n$

$a\in\mathbb{R}$

אני טוען כי R הוא פשוט.

יהי $R \triangleright I \neq (0)$ אידאל דו-צדדי. צריך
להוכיח כי $R = I$, כלומר I מכיל איבר
הפיך. אז יהי $0 \neq p \in I$.

נשים לב כי

$$\partial x^m = m x^{m-1} + x^m \partial$$

לכן, $\partial(x^m \partial^n) - (x^m \partial^n)\partial = m x^{m-1} \partial^n$

לכן, בכל מונום של $\partial p - p\partial \in I$
x מופיע בחזקה נמוכה מן המונום
המקביל של p. אם נעשה את זה
מספיק פעמים, נקבל איבר של I
שהוא רק פולינום במשתנה ∂, אין
בו x כלל.

באינדוקציה מחוץ לייבניץ

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$(xf)^{(n)} = xf^{(n)} + nf^{(n-1)}$$

$$\partial^n x = x\partial^n + n\partial^{n-1}$$

יהי $Q \in I$ פולינום ב-∂.

$$Qx - xQ \in I$$

$$Qx - xQ = \sum_{n=0}^{N} a_n n \partial^{n-1} \Leftarrow Q = \sum_{n=0}^{N} a_n \partial^n$$

כך מורידים את המעלה של Q.

בסוף מקבלים איבר של I שהוא פולינום ממעלה 0 (לא-אפסי), כלומר קבוע.

כלומר כל $I \neq (0)$ מכיל איבר הפיך של R, לכן R פשוט.

תרגיל R לא ארטיני משמאל

$$xR \supsetneq x^2R \supsetneq x^3R \supsetneq \cdots$$

תרגיל $R \not\cong M_n(D)$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל חוג עם חילוק D.

שהרי $M_n(D)$ כן ארטיני משמאל.

תרגיל האידיאלים השמאליים המינימליים של $M_n(D)$ נראים כך:

$$I_k = \left\{ A\in M_n(D) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{ij}=0 \quad \forall i,\ \forall j\neq k \\ a_{ik}\in D \end{array} \right\}$$

אין תורת מבנה של חוגים פשוטים לא-ארטיניים.