**מקליד:** עידן אריה
**מרצה:** פרופ' דוד סרנה
**תאריך:** 2015-11-01

**מבוא לתורת המשחקים**
**89-617-01**

## ניתוח באמצעות normal form game

מציירים מטריצה כאשר השורות מייצגות שחקן אחד והעמודות מייצגות שחקן אחר(אם יש עוד שחקנים צריך לצייר עוד מטריצות בשביל לייצג עוד צירים). כדי למצוא שיווי משקל נאש, צריך למצוא תאים שבהם לכל אחד מהשחקנים, הזזה על פני הציר של השחקן(= שינוי באסטרטגיה) לא יניב תוצאה טובה יותר עבור אותו שחקן.

## שינוי המשחק ע"י הורדת אופציות מהשולחן

לפעמים משנים את המשחק על ידי הורדת אופציות, ובכך משנים את שיווי המשקל ובעצם מתחייבים לאופציות מסויימות, ובכך מכריחים את השחקן השני לבחור באופציה שבמשחק המקורי לא אופטימלית עבורו.

---

במקרים כאלה, ניתן להשתמש באסטרטגיות מעורבות

# אסטרטגיות מעורבות

הרעיון: להכניס מרכיב הסתברותי לאסטרטגיה, ובכך ליצור אפשרויות חדשות במשחק, כאלה שיותר מתאימות לנו.

הגדרה פורמלית - אסטרטגיה $S_i$ עבור שחקן $i$ תהיה פונקציית ההסתברות המוגדרת על הפעולות השונות ב$A_i$.

אסטרטגיה: טהורה: ישנה רק פעולה אחת שמקבלת הסתברות חיובית(שווה ל1) ושאר הפעולות מקבלות הסתברות 0

מעורבת: יש יותר מפעולה אחת שמקבלת הסתברות חיובית(עדיין יכולות להיות פעולות שמקבלות הסתברות 0)

הפעולות המקבלות הסתברות חיובית באסטרטגיה מעורבת נקראות הsupport של האסטרטגיה המעורבת.
נגדיר מחדש:

- $S_i$ - כל האסטרטגיות האפשריות של $i$
- $S$ - כל הפרופילים האפשריים - $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$

## ניתוח משחק עם אסטרטגיות מעורבות

כבר אי אפשר להתייחס לתאים כבודדים - צריך לחשב את התוחלת של כל תא לפי סט האסטרטגיות המעורבות של השחקנים השונים:

$$u_i(x) = \sum_{a \in A} u_i(a) \Pr(a|s)$$

$$\Pr(a|s) = \prod_{j \in N} s_j(a_j)$$

## שינוי הגדרות best response

- אסטרטגיית best response(בניגוד לפעולת best response):

$$s_i^* \in \mathrm{BR}(s_{-i}) \iff \forall_{s_i \in S_i} u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

- שיווי משקל נאש(שוב - גם כאן מדובר על אסטרטגיה, לא פעולה):

$$s = \langle s_1, \dots s_n \rangle \text{ is a Nash Equilibrium } \iff \forall_i s_i \in \mathrm{BR}\left(s_{-i}\right)$$

## משפט נאש

לכל משחק סופי יש שיווי משקל נאש[1](או שיווי משקל באסטרטגיות טהורות או שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות).
מה זאת אומרת "משחק סופי"?

- מספר שחקנים סופי
- מספר הפעולות של כל שחקן סופי

## חישוב שיווי משקל נאש עבור אסטרטגיות מעורבות

באופן כללי, חישוב משקל נאש עבור אסטרטגיות מעורבות מאוד קשה כי יש המון קומבינציות של אפשרויות. אבל אם אנחנו יודעים מה הsupport זה נעשה הרבה יותר קל:
נרצה לבחור $p$ כך שהשחקן השני יהיה אדיש כלפי האפשרויות בsupport שלו, כדי שהוא לא ירצה לסטות. למשל במשחק מלחמת המינים:

$$u_{\text{ROW}}\left(\text{Boxing}|(p, 1-p)\right) = u_{\text{ROW}}\left(\text{Shopping}|(p, 1-p)\right)$$

$$2p + 0\left(1-p\right) = 0p + 1\left(1-p\right)$$

$$p = \frac{1}{3}$$

## במציאות זה יותר מסובך

למשל במשחק כדורגל, הבועט צריך לבחור אם לבעוט ימינה או שמאלה והשוער צריך לבחור אם לקפוץ ימינה או שמאלה. אבל מה אם, נגיד, הבועט חלק יותר בבעיטה ימינה, ומפספס ב$25\%$ מהמקרים.
לאן השוער צריך לקפוץ? לקפוץ יותר שמאלה כי אם הבועט בועט ימינה הוא יכול לפספס? לקפוץ יותר ימינה כי הבועט יכול להעריך שהשוער יקפוץ ימינה?
הרעיון הוא להשיג אדישות - השוער צריך לבחור סיכויים כך שהבועט יישאר אדיש, לא ירצה לסטות:

$$(1-p) \cdot 1 = p \cdot 0.75$$

$$p = \frac{1}{1.75} = \frac{4}{7}$$

ואותו דבר עם הבועט:

$$p + 0.25 \cdot (1-p) = 1 - p$$

$$p = \frac{3}{7}$$

כלומר השוער יקפוץ יותר לשמאל, והבועט יבעט יותר לצד החלש שלו - ימינה

[1] נאש לא קרא לזה "שיווי משקל נאש" - יש סוברים ששיווי משקל נאש נקרא על שם המשפט הזה