- 1 -

בס"ד

פתרון תרגיל 2 באלגברה ליניארית 2 :

1.

א) העתקה לינארית $T(\vec{0})=\vec{0}$ אך כאן זה לא מתקיים:

$T(0,0)=(0+1,0)=(1,0)$ ← ולכן הפונק' אינה העתקה לינארית

ב) $T\left(c_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}c_1x_1+c_2x_2\\c_1y_1+c_2y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1y_1+c_2y_2\\c_1x_1+c_2x_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}y_1\\x_1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}y_2\\x_2\end{pmatrix}$

$=c_1T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+c_2T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ לכן T העתקה לינארית

ג) נפריך:

$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$

$T(v_1+v_2)\neq T(v_1)+T(v_2) \Leftarrow T\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\4\end{pmatrix}\neq T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$

ד) $T\left(c_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}c_1x_1+c_2x_2\\c_1y_1+c_2y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1x_1+c_2x_2-(c_1y_1+c_2y_2)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1x_1-c_1y_1+(c_2x_2-c_2y_2)\\0\end{pmatrix}$

$=c_1\begin{pmatrix}x_1-y_1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}x_2-y_2\\0\end{pmatrix}=c_1T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+c_2T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ לכן T העתקה לינארית

ה) נפריך:

$T\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$T(v_1+v_2)\neq T(v_1)+T(v_2) \Leftarrow T\left(\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\1\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}\pi\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\neq T\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\2\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

2.

א. T לא העתקה ליניארית כי אם ניקח $z\in\mathbb{C}$ נקבל שקיים $\alpha\in\mathbb{C}$ שעבורו מתקיים $T(\alpha z)=\overline{\alpha z}=\overline{\alpha}T(z)\neq\alpha T(z)$.

ב. T העתקה ליניארית. הוכחה:

יהיו $z_1,z_2\in\mathbb{C},\alpha\in\mathbb{R}$ כעת מכיוון ש $\alpha\in\mathbb{R}$ נקבל $\alpha=\overline{\alpha}$

ואז $T(z_1+\alpha z_2)=\overline{z_1+\alpha z_2}=\overline{z_1}+\overline{\alpha}\cdot\overline{z_2}=T(z_1)+\alpha T(z_2)$.

3.

א. נניח שקיים צירוף ליניארי $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0_V$. נוכיח שהוא טריוויאלי. נפעיל T על שני האגפים ונשתמש בכך ש T הע"ל כדי לקבל $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=T(0_V)=0_W$. קיבלנו $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0_W$ אבל נתון $T(v_1),\ldots T(v_n)$ בת"ל לכן מדובר בצירוף ליניארי טריוויאלי ומכאן גם הצירוף הליניארי $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0_V$ הוא טריויאלי ו $v_1,\ldots v_n$ בת"ל.

ב. נניח שקיים צירוף ליניארי $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0_W$. נוכיח שהוא טריוויאלי. נשתמש בכך ש T הע"ל כדי לקבל $T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}T(\alpha_i v_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0_W=T(0_V)$. מכיון ש T חח"ע נקבל $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0_V$ ולבסוף ניעזר בכך ש $v_1,\ldots v_n$ בת"ל כדי לקבל הדרוש.

המשך:

4. נייצג ווקטור כללי ב-$\mathbb{R}^2$ באמצעות הבסיס הנתון: $(x,y)=\alpha(0,1)+\beta(1,1)$. פותרים ומקבלים: $\alpha=y-x,\quad \beta=x$, כלומר: $(x,y)=(y-x)(0,1)+x(1,1)$ נפעיל את ההעתקה על שני האגפים, נשתמש בליניאריות שלה ונקבל:

$.T(x,y)=(4y-3x,5y-3x,6y-3x)$

5. יהי $p(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$. $\{1,1+x,1+x+x^2\}$ הוא בסיס ל $\mathbb{R}_2[x]$. נציג את $p(x)=ax^2+bx+c$ לפי הבסיס הנ"ל.

$$ax^2+bx+c=\alpha(1+x+x^2)+\beta(1+x)+\gamma=\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$\Rightarrow a=\alpha,b=\alpha+\beta,c=\alpha+\beta+\gamma\Rightarrow\alpha=a,\beta=b-a,\gamma=c-b$$
$$\Rightarrow p(x)=a(1+x+x^2)+(b-a)(1+x)+(c-b)1$$
$$\Rightarrow T(p(x))=T(a(1+x+x^2)+(b-a)(1+x)+(c-b)1)$$
$$=aT(1+x+x^2)+(b-a)T(1+x)+(c-b)T(1)$$
$$=a(1-x^2+x^4)+(b-a)(x^3+x^2)+(c-b)x$$
$$=ax^4+(b-a)x^3+(b-2a)x^2+(c-b)x+a$$

6. קל לראות שהוקטורים $\left\{\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ ת"ל, ומתקיים $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\1\end{pmatrix}$, לכן כל ה"ל צריכה לקיים $T\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-2\cdot T\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\1\end{pmatrix}$. בשאלה שלנו נקבל $x+1-2x=1-x\neq 2$ לכן אין ה"ל כזו.