אלגברה מופשטת 2 – תרגיל כיתה 10

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

הגדרה:

מודול (שמאלי) מעל חוג עם יחידה R הוא חבורה חיבורית אבלית עם פעולה

$$\begin{aligned} R\times M &\to M \\ (r,a) &\to ra \end{aligned}$$

המקיימת לכל $r,s\in R$ ו $a,b\in M$

1. $r(a+b)=ra+rb$
2. $(r+s)a=ra+sa$
3. $r(sa)=(rs)a$
4. $1\cdot a=a$

הערה:

לכל $a\in M$, $0_R\cdot a=0_M$ ולכל $r\in R$, $r\cdot 0_M=0_M$.

דוגמאות:

1. כל מרחב וקטורי הוא מודול מעל שדה הבסיס שלו.
2. כל חבורה אבלית היא מודול מעל השלמים.

תרגיל:

תהי G חבורה אבלית. נסמן ב$End(G)$ את קבוצת ההומומורפיזמים מG לעצמה.

$End(G)$ הוא חוג ביחס לחיבור והרכבה [הוכחה לבית]. יהי R כלשהו ונניח שקיים הומומורפיזם של חוגים $\varphi: R\to End(G)$. הוכח כי ניתן להפוך את G למודול מעל R.

פיתרון: G הוא כבר חבורה אבלית. צריך בעצם להגדיר את הכפל בין R לG ולראות שהוא עומד בקריטריונים. נגדיר $rg=\varphi(r)(g)$ לכל $r\in R$ ו$g\in G$. [בדיקה בבית]

הערה: התנאי בתרגיל הוא גם תנאי הכרחי לכך שחבורה G היא מודול מעל R [הוכחה בבית לאמיצים].

הגדרה: יהי מודול M מעל R. תת-חבורה $N < M$ נקראת תת-מודול אם לכל $r \in R$ ו $n \in N$, $rn \in N$.

הערה: לא כל תת-חבורה היא תת-מודול. למשל $\mathbb{Q}$ הוא $\mathbb{Q}$-מודול, ו $\mathbb{Z}$ היא תת-חבורה של $\mathbb{Q}$, אבל היא אינה תת-מודול.

הערה: יהי מרחב וקטורי V מעל שדה F ו $T : V \to V$ העתקה ליניארית. אפשר להגדיר את V כמודול מעל $F[x]$ ע"י הגדרת הכפל $f(x) \cdot v = f(T)(v)$.

תרגיל: הבינתן העתקה ליניארית $T : V \to V$, תת-מרחב W נקרא T-אינווריאנטי אם $T(W) \subseteq W$. הוכח כי מרחב כזה הוא תת-מודול של V כמודול מעל $F[x]$.

פיתרון: מכיוון ש W הוא תת-מרחב אז אין צורך להוכיח כי הוא תת-חבורה חיבורית. צריך להוכיח כי לכל $f(x) \in F[x]$ ו $w \in W$, $f(x) \cdot w \in W$.

$T(w) \in W$ בגלל שהוא T-אינווריאנטי. באופן אינדוקטיבי לכל n, $T^n(w) \in W$.

מכיוון ש W מרחב וקטורי מעל F, כל קומבינציה ליניארית של $T^n(w)$-ים היא ב W.

בפרט $f(T)(w)$ הוא קוימבינציה כזאת, ולכן הוא ב W, משמע $f(x) \cdot w \in W$.

הערה: עבור מודול M מעל R ותת-מודול N, כחבורות חיבוריות $N \lhd M$ ולכן יש לנו את חבורת המנה M / N. חבורה זו אף היא מודול מעל R.

הגדרה: יהיו M_1 ו M_2 מודולים מעל R. $f:M_1\to M_2$ הוא הומומורפיזם של מודולים אם הוא הומומורפיזם של חבורות המקיים $f(rm)=rf(m)$.

נסמן $\ker(f)=\{m\in M_1: f(m)=0\}$. $\ker(f)$ הוא תת-מודול של M_1. מתקיימים משפטי האיזומורפיזם כמודולים, בפרט $M_1/\ker(f)\cong \mathrm{Im}(f)$.

תרגיל: יהי R חוג קומוטטיבי. יהי n מספר שלם ותהי E קבוצת הפונקציות $f:\{1,\dots,n\}\to R$. הוכח כי אפשר לתת ל E מבנה של R-מודול, וכי $R^n\cong E$ כמודולים.

פיתרון: אפשר להגדיר חיבור פונקציות איבר איבר, כלומר $f(x)+g(x)=(f+g)(x)$. אז נקבל ש E חבורה חיבורית [הוכחה קצרה]. נגדיר כפל $R\times E\to E$ ע"י $r\cdot f=f_r$ כאשר $f_r(x)=rf(x)$ לכל $1\le x\le n$. [יש לבדוק את הדרישות.]

נגדיר $\varphi:E\to R^n$ ע"י $\varphi(f)=(f(1),\dots,f(n))$. נראה שזהו איזומורפיזם, דהיינו הומומורפיזם חח"ע ועל.

$$\varphi(f+g)=((f+g)(1),\dots,(f+g)(n))$$
$$=(f(1),\dots,f(n))+(g(1),\dots,g(n))=\varphi(f)+\varphi(g)$$

$$\varphi(rf)=((rf)(1),\dots,(rf)(n))=(rf(1),\dots,rf(n))=r(f(1),\dots,f(n))=r\varphi(f)$$

יהי $f\in\ker(\varphi)$. אזי $(f(1),\dots,f(n))=(0,\dots,0)$ ולכן $f(x)=0$ לכל $1\le x\le n$, משמע φ חח"ע.

לכל $(r_1,\dots,r_n)$ יש מקור והוא הפונקציה המקיימת $f(x)=r_x$ לכל $1\le x\le n$, ולכן φ על.

הגדרה: M ייקרא מודול פשוט אם אין לו תת-מודולים לא טריוויאליים.

הערה: כל חוג הוא מודול מעל עצמו. במקרה זה, כל אידיאל שמאלי הוא תת-מודול ולהיפך. לכן החוג הוא פשוט אם ורק אם הוא מודול פשוט.

הגדרה: עבור $a \in M$ נגדיר $Ra = \{ra : r \in R\}$. זהו תת-מודול של M. הוא נקרא התת-מודול הציקלי הנוצר ע"י a.

טענה: M הוא מודול פשוט אם ורק אם לכל $0 \neq a \in M$, $Ra = M$.

הוכחה: הכיוון הישיר הוא טריוויאלי. נוכיח את הכיוון ההפוך. נניח בשלילה כי M לא פשוט וכי לכל $0 \neq a \in M$, $Ra = M$. אזי קיים תת-מודול לא טריוויאלי $N < M$. מכיוון שאיננו טריוויאלי, קיים $0 \neq a \in N$. מתקיים $Ra \subseteq N$ בגלל ש N תת-מודול. אולם $Ra = M$ וזו סתירה.

תרגיל: אם M מודול ציקלי מעל R ו N תת-מודול של M אזי M/N מודול ציקלי מעל R.

פיתרון: M מודול ציקלי ולכן קיים $a \in M$ כך שלכל $b \in M$ קיים $r \in R$ שעבורו $ra = b$. נביט באיבר כללי $b + N \in M/N$. מתקיים $b + N = ra + N$. כעת, $rN = N$ בגלל ש N תת-מודול ולכן $ra + N = ra + rN = r(a + N)$. משמע, M/N ציקלי הנוצר ע"י $a + N$.

הערה: ייתכן ש N ו M/N הם ציקליים אך M איננו. למשל $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z} \times \{0\}$.

משפט: M הוא מודול ציקלי מעל R אם ורק אם קיים אידיאל שמאלי $I \lhd R$ כך ש $M \cong R/I$.