הרצאה

היפוך של התמרת לפלאס

§1. ניסוח בעיה. נוסחה של מלין. (Mellin H.)

תהי נתונה פונקציה $F(p)$. יש למצוא את הפונקציה (של משתנה ממשי) כך שמתקיימת התאמה הבאה:

$$f(t) \longrightarrow F(p) \qquad (1.1)$$

ברור ששאלה זאת כוללת שני שאלות שונות:

א) באיזה דרישות לפונקציה $F(p)$ קיימת פונקציה $f(t)$ כך שמקיימת התאמה (1.1)?

ב) תהי $F(p)$ היא תמונה של מקור $f(t)$ איזשהו. (כלומר התאמה (1.1) מקיימת למקור $f(t)$ איזשהו) יש למצוא $f(t)$.

נתחיל מפתרון של שאלה ב)

משפט 1.1

תהי $f(t)$ הוא מקור עם מעריך גידול S_0 ו- $F(p)$ זאת תמונה שלו. אז מקיימת נוסחה:

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\infty}^{S+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp\,, \quad \operatorname{Re} p = S > S_0 \qquad (1.2)$$

כאן אינטגרל מחשבים לאורך קו ישר $\operatorname{Re} p = S > S_0$ ויש להבין אותו במובן ערך ראשי כלומר:

$$\int_{S-i\infty}^{S+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp \overset{def}{=} \lim_{N\to+\infty}\int_{S-iN}^{S+iN} e^{pt}F(p)\,dp$$

בנוסף אינטגרל (1.2) בלתי תלוי ב- S $(S > S_0)$.

הערה נוסחה (1.2) נקראת נוסחה של מלין.

הוכחה

להלן נשתמש במשפט שידוע מתורת התמרת הפורייה

משפט תהי פונקציה $f(x)$ איזשהו שייכת ל-$L_1(\mathbb{R})$ ובנוסף היא חלקה למקוטעין בכל קטע סופי של ציר ממשי. אז מתקיימת

נוסחה אינטגרלית של פוריה:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)e^{i\xi(x-\eta)}d\eta\right]d\xi,\quad x\in R \quad (1.3)$$

כאן x היא נקודה שרירותית $x\in R$ ואינטגרל חיצוני יש להבין במובן של ערך ראשי:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)e^{i\xi(x-\eta)}d\eta\right]d\xi,\quad x\in R \quad (1.4)$$

<u>הערה</u> משפט נוכיח בתנאי נוסף: נדרוש (בנוסף) שפונקציה מקור $f(t)$ היא חלקה למקוטעין ועל ידי כך נפשט את ההוכחה. ובכן לפי תנאים של משפט ותנאי נוסף שלנו ידוע אינפורמציה הבאה

1) פונקציה $f(t)$ היא מקור
2) מערך גידול של $f(t)$ הוא מספר S_0.
3) פונקציה $f(t)$ היא חלקה למקוטעין (על הציר R)
4) נתונה פונקציה $F(p)$ כך שמקיים שוויון

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-p\eta}f(\eta)d\eta \quad \text{עבור } Re\,p>S_0$$

בעזרת הנתונים (1-2-3-4) יש למצוא את הפונקציה $f(t)$.
נגדיר את הפונקציה בעזרת חדשה:

$$\varphi(t)=e^{-st}f(t),\quad s>s_0 \quad (1.5)$$

אז ברור ש $\varphi(t)\in L_1(R)$ והיא חלקה למקוטעין. למעשה, כיון ש $f(t)$ היא חלקה למקוטעין אז $\varphi(t)$ גם כן חלקה למקוטעין כי e^{-st} בעלת את הנגזרת רציפה. חוץ מזה!

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt=\left|\begin{array}{c}f\equiv 0\\ \text{בקטע } (-\infty,0)\end{array}\right|=\int_0^{\infty}|\varphi(t)|dt\le\left|\begin{array}{l}|f(t)|\le M(\varepsilon)e^{(S_0+\varepsilon)t}\\ t\in(0,\infty),\ \varepsilon>0 \text{ כאן}\end{array}\right|$$

$$\le M(\varepsilon)\int_0^{\infty}e^{-st}e^{(S_0+\varepsilon)t}dt=M(\varepsilon)\int_0^{\infty}e^{-(S-S_0-\varepsilon)t}dt=$$

$$= \left| \begin{array}{l} S - S_0 \cdot \varepsilon := \varepsilon \Rightarrow \\ \varepsilon = \frac{S - S_0}{2} > 0 \end{array} \right| = M(\varepsilon) \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} dt =$$

$$= \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon} < \infty \implies \varphi(t) \in L_1(\mathbb{R})$$

בסוף הכול מקבלים שפונקציה $\varphi(t)$ ניתן להשתמש בנוסחת פוריה $\Leftarrow$

$$\frac{\varphi(t-0)+\varphi(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta \right] d\xi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(\eta) = \\ = e^{-s\eta} f(\eta) \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\eta} f(\eta) e^{i\xi t} \cdot e^{-i\xi\eta} d\eta \right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-(s+i\xi)\eta} d\eta \right] e^{i\xi t} d\xi \implies$$

$$e^{-st} \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-(s+i\xi)\eta} d\eta \right] e^{i\xi t} d\xi \implies$$

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-(s+i\xi)\eta} d\eta \right]}_{F(p)} e^{(s+i\xi)t} d\xi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} s + i\xi := p \implies \\ i d\xi = dp \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \to \infty} \int_{s-iN}^{s+iN} e^{pt} F(p) dp$$

אם נחליף S במספר $S_1 > S_0$ ו $S \neq S_1$ ונעשה אותו דבר שעשינו אך נשתמש ב-S_1 במקום S אז נקבל:

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 - i\infty}^{S_1 + i\infty} e^{pt} F(p) dp$$

זאת אומרת שאינטגרל של מלין הוא בלתי תלוי ב-S ■

<u>**מסקנה**</u> נניח שמתקיים תנאי של משפט 1.1 ובנוסף ידוע שפונקציה $f(t)$ היא רציפה בנקודה t איפשהו. אז

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \quad \mathrm{Re}\,p = s > s_0$$

משפט 1.2

תהי $\varphi(t)$ ו- $f(t)$ הן פונקציות מקורות והן בעלות אותה התמונה:

$$\varphi(t)\to F(p), \qquad f(t)\to F(p)$$

אז אם פונקציות f ו- φ הן רציפות בכל נקודות $t\in R$
אז עבור $t\in R$, $f(t)\equiv\varphi(t)$

הוכחה

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp=\varphi(t) \qquad \blacksquare$$

ובכן אם $F(p)$ היא תמונה של מקור $f(t)$ איזשהו אז מקור הנדון ניתן למצוא לפי נוסחה מלין. לנו נותר לתאר באיזה דרישות לפונקציה $F(p)$ היא תמונה של מקור איזשהו.

משפט 1.3

תהי פונקציה $F(p)$ של משתנה מרוכב $p=x+iy$ מקיימת לתנאים הבאים:

(1) פונקציה $F(p)$ היא רגולרית (אנליטית) בחצי-מישור $\mathrm{Re}\,p>a$.

(2) בתחום $\mathrm{Re}\,p>a$ פונקציה $F(p)$ שואפת לאפס כאשר $|p|\to\infty$ $\left(\lim\limits_{|p|\to\infty}F(p)=0\right)$ במידה שוה לפי $\arg p$.

(3) לכל $\mathrm{Re}\,p=x>a$ מתכנס אינטגרל הבא:

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}|F(p)|\,dy\le M<\infty, \quad \forall x>a$$

אז פונקציה $F(p)$ בתחום $\mathrm{Re}\,p>a$ היא תמונה של מקור $f(t)$ עם מעריך גידול $s_0=a$ ובנוסף מקור $f(t)$ ניתן למצוא לפי נוסחה של מלין!

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp\ ,\quad x>a$$

בנוסחה כאן אינטגרל לא אמיתי יש לחשב לאורך ישר $Re\,p=x$ במובן ערך ראשי כלומר:

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp=\lim_{N\to\infty}\int_{x-iN}^{x+iN} e^{pt}F(p)dp$$

<u>הערה</u> כאן נשים לב חישוב ישיר של אינטגרל מלין בדרך כלל קשה מאוד. חיפוש של מקור לפי תמונה שלו ניתן לבצע בעזרת הטבלת התמונות ותכונות כלליות של התמרה לפלאס או בעזרת האינטגרל מלין אך עם דרישות נוספות לתמונה (תראו להלן §2)

§2. מקורות של תמונות רציונליות

<u>משפט 2.1</u> תהי פונקציה $F(p)$ היא רציונלית כלומר

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$$

וכאן $A(p)$ ו-$B(p)$ הם פולינומים לא-אפס למשל. נניח שקוטבים של פונקציה $F(p)$ הם מספרים

$$p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n$$

ובנוסף

$$\lim_{|p|\to\infty}F(p)=0$$

אז פונקציה $F(p)$ היא תמונה של מקור $f_1(t)$ וכאן

$$f_1(t)=\eta(t)f(t),$$

$$\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases},\quad f(t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{p=p_k}{res}\left(F(p)e^{pt}\right)$$

חוץ מזה לפונקציה $f(t)$ ניתן להוסיף צורה אחרת

אם נשתמש הריבויים של שרשים $p_1, p_2, \dots p_n$ נסמן אותם ב $r_1, r_2, \dots, r_n$ אז מתקיימת נוסחה

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left\{\frac{A(p)}{B(p)}(p-p_k)^{r_k}e^{pt}\right\}$$

<u>**דוגמה**</u> יש למצוא מקור לפונקציה-תמונה!

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}$$

<u>**פתרון**</u>

במקרה הנדון כאן $A(p)\equiv 1$, $B(p)=(p^2+1)$ ובנוסף

$$B(p)=(p-i)(p+i),\quad i^2=-1$$

קוטבים $p_1=-i$ ו- $p_2=i$ בעלי את הריבוי $r_1=r_2=1$
ולכן

$$f(t)=\operatorname*{res}_{p=-i}\left\{\frac{1}{p^2+1}e^{pt}\right\}+\operatorname*{res}_{p=i}\left\{\frac{1}{p^2+1}e^{pt}\right\}=$$

$$=\frac{1}{0!}\lim_{p\to -i}\left\{\frac{1}{(p-i)(p+i)}(p+i)e^{pt}\right\}^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{0!}\lim_{p\to i}\left\{\frac{1}{(p-i)(p+i)}(p-i)e^{pt}\right\}^{(0)}=$$

$$=-\frac{1}{2i}e^{-it}+\frac{1}{2i}e^{it}=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\sin t \quad \blacksquare$$

<u>**הערה**</u> <u>דוגמאות נוספות תראו ב- 3 §.</u>

<u>**משפט 2.2**</u> תהי פונקציה $F(p)$ מתפתחת לטור

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\dots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\dots$$

אם טור הנדון מתכנס בתחום $|p|>R$ (וכאן $R>0$) אז פונקציה $F(p)$ היא תמונה של מקור $f(t)$ וכאן

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ a_0+\frac{a_1}{1!}t+\frac{a_2}{2!}t^2+\dots+\frac{a_n}{n!}t^n+\dots, & t\geq 0\end{cases}$$

חוץ מזה מעריך גידול S_0 של מקור $f(t)$ מקיים אי-שוויון:

$$S_0 \le 1 + l_0, \quad l_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

<u>דוגמה 2</u> נמצא מקור פונקציה $F(p) = (1+p^2)^{-1}$.

<u>פתרון:</u>

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{p^2}} = \Big|\, |p| \gg 1 \,\Big| =$$

$$= \frac{1}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+2}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m}{p^m},$$

וכאן:

$$c_m = \begin{cases} 0, & m = 2n+1 \\ (-1)^n, & m = 2n+2 \end{cases}, \quad \text{עבור } n \ge 0$$

במקרה הנדון:

$$l_0 = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|c_m|} = 1$$

לכן טור מתכנס כאשר $|p|>1$ כי ידוע משפט הבא

<u>משפט</u> רדיוס התכנסות r של טור חזקות

$$\eta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

ניתן למצוא לפי נוסחה של קושי-אדמר

$$r = \frac{1}{l_0}, \quad l_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

משפט 2.2 כעת נותן שמתקיימות נוסחאות הבאות:

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m}{(m-1)!}t^{m-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1}\Big|_{k=2n+2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1} = \sin t \quad \blacksquare$$

§3 שיטות שימושיות להיפוך התמרת לפלאס.
עובדות נוספות ודוגמאות

I. שיטה אלגברית

שיטה זאת ההיפוך של התמרה לפלאס משתמשים במקרים כאשר ניתן למצוא את המקור בעזרת התכונות כלליות של התמרת לפלאס וטבלת התמונות. לישום של שיטה זאת בדרך כלל יש לפתח את התמונה רציונלית הנתונה $F(p)$ לסכום של שברים פשוטים ואחר-כן פונים לטבלת התמונות. בפרט אנחנו משתמשים את המשפט הבא.

<u>משפט 3.1</u> תהי $F(p)$ הוא שבר רציונלי אמיתי עם קוטבים

$$p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n$$

ו- $r_1, r_2, \dots, r_n$ הם ריבויים שלהם. אז אם פיתוח לשברים אמיתיים של $F(p)$ הוא מהצורה:

$$F(p)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r_k}\frac{M_{kl}}{(p-p_k)^l}\ ,$$ M_{kl} הם קבועים

אז מקור שמתאים ל- $F(p)$ הוא מהצורה הבאה:

$$f(t)=\begin{cases}0\ , & t<0\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r_k}\frac{M_{kl}}{(l-1)!}\,t^{l-1}e^{p_k t}\ , & t\geq 0\end{cases}$$

<u>הוכחה</u>

ידוע נוסחאות הבאות:

$$t^m\longrightarrow\frac{m!}{p^{m+1}}\ \Longrightarrow\ \left|\begin{matrix}f(t)\to F(p)\ \Rightarrow\\ e^{\lambda t}F(p)\to F(p-\lambda)\end{matrix}\right|\ \Rightarrow t^m e^{\lambda t}\to\frac{m!}{(p-\lambda)^{m+1}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r_k}\frac{M_{kl}}{(l-1)!}\,t^{l-1}e^{p_k t}\to\left|m=l-1\right|\to$$

$$\to\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r_k}\frac{M_{k}}{(l-1)!}\,\frac{(l-1)!}{(p-p_k)^l}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r_k}\frac{M_{kl}}{(p-p_k)^l}=F(p)\ \blacksquare$$

<u>מסקנה</u> אם התנאים של משפט 3.1 נקבע
בנוסף שמתק״ימ שוויונים $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 1$
כלומר מתק״ים פיתוח לשברים:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{p - p_k}$$

אז מקור המתאים לתמונה $F(p)$ הוא מהצורה

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sum_{k=1}^{n} M_k e^{p_k t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

<u>הוכחה</u>

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} M_k e^{p_k t} \to \left| e^{p_k t} \to \frac{1}{p - p_k} \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{p - p_k} \quad \blacksquare$$

<u>מסקנה</u> אם התמונה $F(p)$ היא מהצורה:

$$F(p) = \frac{M(p-\alpha) + N}{(p-\alpha)^2 + \beta^2} \qquad (M, N, \alpha, \beta \text{ הם קבועים})$$

אז מקור שמתאים ל-$F(p)$ ניתן לרשום בצורה הבאה

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{\alpha t}(M \cos\beta t + N \sin\beta t), & t \geq 0 \end{cases}$$

<u>הוכחה</u>
ידוע שמתק״ימות נוסחאות הבאות:

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta t &\to \frac{p}{p^2+\beta^2} \\ \sin\beta t &\to \frac{\beta}{p^2+\beta^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} e^{\alpha t}\cos\beta t &\to \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2} \\ e^{\alpha t}\sin\beta t &\to \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$e^{\alpha t}(M\cos\beta t + N\sin\beta t) \to \frac{M(p-\alpha) + N\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2} \quad \blacksquare$$

<u>דוגמה</u> יש למצוא מקור לתמונה $F(p)$ כאשר

$$F(p) = \frac{1}{p\,(p-1)(p^2+4)}$$

פתרון/
נקבע:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$

וכאן/ $A, B, C, D = ?$ $\Leftarrow$

$$\frac{1}{(p-1)(p^2+4)} = A + B\frac{p}{p-1} + p\,\frac{Cp+D}{p^2+4}$$

וכעת $p := 0$ $\Leftarrow$

$$\left.\frac{1}{(p-1)(p^2+4)}\right|_{p=0} = -\frac{1}{4} = A \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{4}}$$

באופן/ דומה!

$$\frac{1}{p(p^2+4)} = -\frac{1}{4}\,\frac{p-1}{p} + B + (p-1)\,\frac{Cp+D}{p^2+4} \mapsto$$

$$\left.\frac{1}{p(p^2+4)}\right|_{p=1} = \frac{1}{5} = B \mapsto \boxed{B = \frac{1}{5}}$$

לשם כך למצוא C נעבור לגבול כאשר $|p|\to\infty$ בנוסחה
שהשתמשנו לעיל להגדרת ה-A:

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{1}{(p-1)(p^2+1)} = 0 = \lim_{|p|\to\infty}\left[A + B\frac{p}{p-1} + \frac{Cp^2+Dp}{p^2+4}\right]$$

$$= A + B + C \Rightarrow C = -A - B = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \mapsto$$

$$\boxed{C = 1/20}$$

ובכן:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{5(p-1)} + \frac{20^{-1}p + C}{p^2+4}$$

אם בנוסחה זאת נקבע למשל $p=2$ אז נקבל C:

$$\frac{1}{2\cdot 1\cdot 8}^{\setminus 5} = -\frac{1}{8}^{\setminus 10} + \frac{1}{5}^{\setminus 16} + \frac{10^{-1}+C}{8}^{\setminus 10} \mapsto$$

$$5 = -10 + 16 + 1 + 10C \Rightarrow \boxed{C = -1/5}$$

אם יצא כן המוסר אם כבר קבלנו

$$F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{p-1} + \frac{20^{-1}p - 5^{-1}}{p^2+4}$$

<u>הערה</u> ערך D ניתן לקבל אם כן באופן אחר:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{5(p-1)} + \frac{20^{-1}p + D}{p^2+4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} + \frac{1}{4p} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{(p-1)(p^2+4)} + \frac{1}{4}\right] = \frac{4+p^3+4p-p^2-4}{4p(p-1)(p^2+4)} =$$

$$= \frac{p^3-p^2+4p}{4p(p-1)(p^2+4)} = \left| \text{מצמצם } p \right| = \frac{p^2-p+4}{4(p-1)(p^2+4)} \Rightarrow$$

$$\frac{p^2-p+4}{4(p-1)(p^2+4)} = \frac{1}{5(p-1)} + \frac{20^{-1}p + D}{p^2+4}$$

בשוויון אחרון לעבור לגבול כאשר $p \to 0$ (אי-אפשר להציב כאן $p=0$ כי במכנו ש-$p \neq 0$):

$$\lim_{p\to 0} \frac{p^2-p+4}{4(p-1)(p^2+4)} = \frac{4}{4(-1)\cdot 4} = \frac{1}{5}\lim_{p\to 0}\frac{1}{p-1} + \lim_{p\to 0}\frac{20^{-1}p + D}{p^2+4}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{D}{4} \Rightarrow \boxed{D = -\frac{1}{5}}$$

כעת משתמשים בטבלת התמונות ותכונות כפ"י:

$$\left.\begin{aligned} 1 &\to \frac{1}{p} \\ e^t &\to \frac{1}{p-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{4} + \frac{e^t}{5} \to -\frac{1}{4p} + \frac{1}{5(p-1)}}$$

$$\frac{20^{-1}p - 5^{-1}}{p^2+4} = \frac{20^{-1}p - (5^{-1}\cdot 2^{-1})\cdot 2}{p^2+2^2} \Rightarrow$$

$$e^{0\cdot t}\left(20^{-1}\cos 2t - 10^{-1}\sin 2t\right) \to \frac{20^{-1}(p-0) - 10^{-1}\cdot 2}{(p-0)^2+2^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{e^t}{5} + \frac{\cos 2t}{20} - \frac{\sin 2t}{10}}$$ ∎

<u>דוגמה</u> יש למצוא מקור $f(t)$ שמתאים לתמונה

$$F(p)=\frac{p^2+2}{p^3+3p^2+5p+3}$$

<u>פתרון</u>

קודם כל נמצא את הפירוק מכנה לגורמים

<u>משפט</u> נתונה המשואה:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$$

עם מקדמים $a_0, a_1, \dots, a_n$ כך שהם מספרים שלמים.
אם שבר α/β שאי-אפשר לצמצם הוא פתרון של משואה הנתונה אז מספר α הוא מחלק של איבר חופשי a_n ומספר β הוא מחלק של מקדם ראשי a_0.

ובכן במקרה הנדון $a_3=3$ ולכן ערכים אפשריים של α הם מספרים $\alpha=\pm1,\pm3$ כי הם מחלקים של מספר 3.
באותו אופן מקבלים ש $\beta=\pm1$ כי אצלנו $1=a_0$. מכאן נובע שאם למשואה יש פתרון רציונלי אז הוא שייך לקבוצת הערכים אפשריים של $\frac{\alpha}{\beta}$ ובמקרה הנדון זאת קבוצה $\{\pm1,\pm3\}$ בנוסף נשים לב שכל מקדמים של פולינום (p^3+3p^2+5p+3) הם מספרים חיובים ולכן בין פתרונות של משואה $p^3+3p^2+5p+3=0$ אין מספרים חיובים.
לכן נותר לנסות לקיים למשוואה זאת בעזרת המספרים $\{-1,-3\}$

<u>ננסה מספר (-1)</u>

$$p^3+3p^2+5p+3\Big|_{p=-1}=-1+3-5+3=6-6=0$$

מכאן נובע שמתקיים שויון

$$p^3+3p^2+5p+3=(p+1)(Ap^2+Bp+C)\,,\quad \forall p \text{ עבור}$$

ברור שניתן למצוא את הפולינום (Ap^2+Bp+C) אם נחלק (p^3+3p^2+5p+3) ל- $(p+1)$. אז נבצע את החילוק הנדון:

$$\begin{array}{r|l} p^3+3p^2+5p+3 & p+1 \\ \hline -\;p^3+p^2 & p^2+2p+3 \\ \hline 2p^2+5p & \\ -\;2p^2+2p & \\ \hline 3p+3 & \\ -\;3p+3 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow$$

$$\boxed{p^3+3p^2+5p+3=(p+1)(p^2+2p+3)}$$

ובכן:

$$\frac{p^2+2}{(p+1)(p^2+2p+3)}=\frac{A_1}{p+1}+\frac{B_1p+C_1}{p^2+2p+3}\quad,\ \forall p \text{ עבור}$$

וכאן יש למצוא את המספרים A_1, B_1, C_1

כיון שדרך למציאה כבר ידועה לא נביא להלן רק פעולות

בלי הסבר בעזרת המילים:

A_1 :
$$\frac{p^2+2}{p^2+2p+3}=A_1+(p+1)\frac{B_1\cdot p+C_1}{p^2+2p+3}\ \Rightarrow\ p:=-1\ \Rightarrow$$

$$\frac{1+2}{1-2+3}=\frac{3}{2}=A_1\ \Rightarrow\ \boxed{A_1=\frac{3}{2}}$$

B_1 :
$$\frac{p^3+2p}{(p+1)(p^2+2p+3)}=\frac{3}{2}\frac{p}{p+1}+\frac{Bp^2+Cp}{p^2+2p+3}\ \Rightarrow$$

$$\lim_{|p|\to\infty}\frac{p^3+2p}{(p+1)(p^2+2p+3)}=1=\frac{3}{2}\lim_{|p|\to\infty}\frac{p}{p+1}+\lim_{|p|\to\infty}\frac{B_1p^2+C_1p}{p^2+2p+3}=$$

$$=\frac{3}{2}+B_1\ \Rightarrow\ 1=\frac{3}{2}+B_1\ \Rightarrow\ \boxed{B_1=-\frac{1}{2}}$$

C_1 : $p:=0\ \Rightarrow$

$$\left.\frac{p^2+2}{(p+1)(p^2+2p+3)}\right|_{p=0}=\frac{2}{1\cdot3}=\frac{3}{2}\left.\frac{1}{p+1}\right|_{p=0}+\left.\frac{-\frac{p}{2}+C_1}{p^2+2p+3}\right|_{p=0}=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{C_1}{3}\ \Rightarrow\ \boxed{C_1=-\frac{5}{2}}$$

ובכן בסופו של דבר קיבלנו:

$$\frac{p^2+2}{p^3+3p^2+5p+3} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\,\frac{p+5}{p^2+2p+3}$$

כעת נשתמש בתכונות כלליות של התמרת הלפלאס:

$$e^{st} \to \frac{1}{p-s} \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}e^{-t} \to \frac{3}{2}\,\frac{1}{p+1}},$$

$$\frac{p+5}{p^2+2p+3} = \frac{p+5}{(p+1)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{(p+1)+4}{(p+1)^2+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{(p+1)+(2\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{(p+1)^2+(\sqrt{2})^2} \Longrightarrow$$

$$e^{-t}\left(\cos\sqrt{2}t + 2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right) \to \frac{(p+1)+(2\sqrt{2})\sqrt{2}}{(p+1)^2+(\sqrt{2})^2} \Longrightarrow$$

$$e^{-t}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right] =$$

$$= \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\left[e^{-t}\left(\cos\sqrt{2}t + 2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right)\right] \to$$

$$\to \frac{3}{2}\,\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\,\frac{p+1+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{(p+1)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\,\frac{p+5}{p^2+2p+3} =$$

$$= \frac{p^2+2}{p^3+3p^2+5p+3} \Longrightarrow$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ e^{-t}\left(\frac{3}{2} - \frac{\cos\sqrt{2}t}{2} - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right), & t \ge 0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

<u>II. דוגמאות לשימוש תכונות כלליות שהתמרת לפלאס</u>
<u>למציאת המקורות המתאימות לתמונות נתונות</u>

<u>דוגמה 1.</u> יש למצוא מקור שמתאים לתמונה

$$F(p) = \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

<u>פתרון</u>

ידוע נוסחה הבאה:

עבור $|p|\gg 1$, $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}-\frac{2}{p^2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{n}{p^n}+\dots$

ובתחום $|p|\gg 1$ טור הגזון מתכנס. לכן לפי משפט 2.2 פונקציה $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$ היא תמונה. נשים לב שפונקציה $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$ גזירה הנגזרת רציונלית כלומר:

$$\left[\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]'=\left[\ln(p+1)-\ln p\right]'=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}$$

במקרים אלה נוח מאוד להשתמש במשפט לפי אינטגרציה של תמונה:

אם $f(t)\to F(p)$ $\Leftarrow$ $\frac{f(t)}{t}\to\int_p^\infty F(s)\,ds$

במקרה שלנו:

$$\left.\begin{array}{l} e^{-t}\to\frac{1}{p+1} \\ 1-\frac{1}{p} \end{array}\right\}\Rightarrow f(t)=e^{-t}-1\to\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\Rightarrow$$

לפי משפט שכללנו לפני מקדים:

$$\frac{f(t)}{t}=\frac{e^{-t}-1}{t}\to\int_p^\infty\left[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\right]ds=\left(\ln(s+1)-\ln s\right)\Big|_p^\infty=$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\Big|_p^\infty=-\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1-e^{-t}}{t}\to\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)}\ \blacksquare$$

דוגמה 2 יש למצוא מקור שמתאים לתמונה הבאה:

$$F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}$$

פתרון 1

לוקחים הצגות הבאות בפי הסבר נוסף:

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{(p-i)^2(p+i)^2}=\frac{A_1}{p-i}+\frac{A_2}{p+i}+\frac{A_3}{(p-i)^2}+\frac{A}{(p+i)^2}$$

כאן $i^2=-1$. מכאן בדרך שכבר ידוע מקבלים:

$$A_3 : \frac{1}{(p+i)^2} = A_3 + \left[A_1(p-i) + A_2\frac{(p-i)^2}{p+i} + A_4\frac{(p-i)^2}{(p+i)^2}\right]$$

מכאן נציב אם $p:=i$ אז שוויון אחרון מקבל את הצורה:

$$\frac{1}{(2i)^2} = -\frac{1}{4} = A_3 \Rightarrow \boxed{A_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$A_4 : \frac{1}{(p-i)^2} = A_4 + \left\{A_1\frac{(p+i)^2}{p-i} + A_2(p+i) + A_3\left(\frac{p+i}{p-i}\right)^2\right\} \Rightarrow$$

באותו אופן: $p:=-i \Leftarrow$

$$\frac{1}{(-2i)^2} = -\frac{1}{4} = A_4 \Rightarrow \boxed{A_4 = -\frac{1}{4}}$$

ולכן קבלנו:

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{(p-i)^2(p+i)^2} = \frac{A_1}{p-i} + \frac{A_2}{p+i} - \frac{1}{4(p-i)^2} - \frac{1}{4(p+i)^2}$$

אכן:

$$\frac{1}{(p-i)^2(p+i)^2} + \frac{1}{4(p-i)^2} = \frac{A_1}{p-i} + \frac{A_2}{p+i} - \frac{1}{4(p+i)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(p-i)^2(p+i)^2} + \frac{1}{4(p-i)^2} = \frac{1}{(p-i)^2}\left[\frac{1}{(p+i)^2} + \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{(p-i)^2}\,\frac{4+(p+i)^2}{4(p+i)^2} = \frac{p^2+2pi+3}{4(p-i)^2(p+i)^2} = \frac{(p-i)(p+3i)}{4(p-i)^2(p+i)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{p+3i}{4(p-i)(p+i)^2} = \frac{A_1}{p-i} + \frac{A_2}{p+i} - \frac{1}{4(p+i)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{p+3i}{4(p+i)^2} = A_1 + A_2\frac{p-i}{p+i} - \frac{p-i}{4(p+i)^2} \Rightarrow p:=i \Rightarrow$$

$$\frac{4i}{4(2i)^2} = \frac{4i}{-16} = -\frac{i}{4} = A_1 \rightarrow \boxed{A_1 = -\frac{i}{4}}$$

באותה שיטה ניתן למצוא ש $A_2 = \frac{i}{4}$. בסוף הכול קבלנו את השוויון יסודי:

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} = -\frac{i}{4}\frac{1}{p-i} + \frac{i}{4}\frac{1}{p+i} - \frac{1}{4}\frac{1}{(p-i)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(p+i)^2}$$

כעת נשתמש בתכונות כפליות שידוע מקודם:

$$e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(t) \to F(p) \Rightarrow \\ -t\,f(t) \to F'(p) \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$-t e^{\alpha t} \to -\frac{1}{(p-\alpha)^2} \Rightarrow \boxed{t e^{\alpha t} \to \frac{1}{(p-\alpha)^2}} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{i}{4} e^{it} \to -\frac{i}{4}\frac{1}{p-i} \\ \frac{i}{4} e^{-it} \to \frac{i}{4}\frac{1}{p+i} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4} t e^{it} \to \frac{1}{4}\frac{1}{(p-i)^2} \\ \frac{1}{4} t e^{-it} \to \frac{1}{4}\frac{1}{(p+i)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{i}{4}e^{it} + \frac{i}{4}e^{-it} - \frac{t}{4}e^{it} - \frac{t}{4}e^{-it} \to$$

$$\to -\frac{i}{4}\frac{1}{p-i} + \frac{i}{4}\frac{1}{p+i} - \frac{1}{4}\frac{1}{(p-i)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(p+i)^2} = \frac{1}{(p^2+1)^2}$$

כעת נשתמש בנוסחאות אוילר! $e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$ $\Leftarrow$

$$-\frac{i}{4}\left(\cos t + i\sin t\right) + \frac{i}{4}\left(\cos t - i\sin t\right) - \frac{t}{4}\left(\cos t + i\sin t + \cos t - i\sin t\right) = \frac{i}{4}\left\{-\cos t - i\sin t + \cos t - i\sin t\right\} - \frac{t}{4}\,2\cos t =$$

$$= \frac{\sin t}{2} - \frac{t}{2}\cos t = \frac{\sin t - t\cos t}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\sin t - t\cos t}{2} \to \frac{1}{(p^2+1)^2}}$$

פתרון 2

ידוע שאם

$$f(t) \to F(p) \Rightarrow -t\,f(t) \to F'(p)$$

לכן:

$$\sin t \to \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow -t\sin t \to \left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = -\frac{2p}{(p^2+1)^2}$$

או דרך שנייה:

$$\frac{t\sin t}{2} \to \frac{p}{(p^2+1)^2}$$

כעת נזכיר שאם

$$f(t) \to F(p) \quad \Rightarrow \quad \int_0^t f(\xi)d\xi \to \frac{F(p)}{p}$$

מכאן מקבלים:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \xi \sin\xi \, d\xi \to \frac{1}{p}\,\frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{(p^2+1)}$$

ונותר לחשב את האינטגרל הבא:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \xi \sin\xi \, d\xi = \frac{1}{2}\int_0^t \xi \, d(-\cos\xi) = -\frac{\xi\cos\xi}{2}\Big|_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \cos\xi \, d\xi =$$

$$= -\frac{\xi\cos\xi}{2} + \frac{\sin\xi}{2}\Big|_0^t = \frac{\sin t - t\cos t}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\sin t - t\cos t}{2} \to \frac{1}{(p^2+1)^2}}$$

פתרון 3

נזכיר שמתקיים משפט בורל:

$$\left.\begin{aligned} f(t) &\to F(p) \\ g(t) &\to G(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (f*g)(t) \to F(p)\,G(p)$$

זאת אומרת שאם

$$\begin{cases} F(p) = G(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)} \\ f(t) = g(t) = \sin t \to \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

אז מקבלים:

$$(f*f)(t) = (\sin t * \sin t)(t) \to F(p)\cdot F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$(\sin t * \sin t)(t) = \int_0^t (\sin\xi)\sin(t-\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_0^t (\sin\xi)\left[\sin t\cdot\cos\xi - \cos t\,\sin\xi\right]d\xi =$$

$$= \sin t \int_0^t \sin\xi \cos\xi \, d\xi - \cos t \int_0^t \sin^2\xi \, d\xi =$$

$$= \frac{\sin t}{2} \int_0^t \sin 2\xi \, d\xi - \cos t \int_0^t \frac{1-\cos 2\xi}{2} d\xi =$$

$$= \frac{\sin t}{2}\left[-\frac{\cos 2\xi}{2}\Big|_0^t\right] - \frac{t\cos t}{2} + \cos t\left(\frac{\sin 2\xi}{4}\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{\sin t}{4}(1-\cos 2t) - \frac{t\cos t}{2} + \frac{\sin 2t \cdot \cos t}{2} =$$

$$= \frac{\sin t}{4} - \frac{t\cos t}{2} + \frac{\sin 2t\cos t - \cos 2t \sin t}{4} =$$

$$= \frac{\sin t}{4} - \frac{t\cos t}{2} + \frac{\sin(2t-t)}{4} = \frac{\sin t}{4} - \frac{t\cos t}{2} + \frac{\sin t}{4} =$$

$$= \frac{\sin t - t\cos t}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\sin t - t\cos t}{2} \to \frac{1}{(p^2+1)^2}}$$

<u>דוגמה 3.</u> יש למצוא את המקור לתמונה הבאה:

$$F(p) = \frac{p^2}{p^3+1} e^{-2p}$$

<u>פתרון</u> לפי כלל

$$f(t) \to F(p) \Rightarrow f(t-a) \to e^{-pa} F(p)$$

לכן במקרה שלנו מספיק למצוא מקור לפונקציה-תמונה

$$F_1(p) = \frac{p^2}{p^3+1}$$

כי אם $f_1(t) \to F_1(p) = \frac{p^2}{p^3+1} \Rightarrow f(t) = f_1(t-2) \to \frac{p^2}{p^3+1} e^{-2p}$

כעת נבצע פירוק את הפונקציה $F_1(p)$ לשברים פשוטים

$$\frac{p^2}{p^3+1} = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2-p+1} \Rightarrow$$

$$\frac{p^2}{p^3+1} = \frac{A(p^2-p+1)+(p+1)(Bp+C)}{p^3+1} \Rightarrow$$

$$p^2 \equiv Ap^2 - Ap + A + Bp^2 + Cp + Bp + C \Rightarrow$$

$$(A+B-1)p^2 + (B+C-A)p + (A+C) \equiv 0 \quad \forall p \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=1 \\ -A+B+C&=0 \\ A+C&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} B&=1-A \\ C&=-A \\ -A+B+C&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B=1-A \\ C=-A \\ -A+(1-A)-A=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} B&=1-A \\ C&=-A \\ A&=1/3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{B=\frac{2}{3},\ C=-\frac{1}{3},\ A=\frac{1}{3}}$$

ולכן קיבלנו את הנוסחה הבאה:

$$\frac{p^2}{p^3+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{p+1} + \frac{2p-1}{3(p^2-p+1)}$$

כעת נשתמש בתכונות בסיסיות:

$$e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}e^{-t} \to \frac{1}{3}\,\frac{1}{p+1}} ;$$

$$\frac{2p-1}{p^2-p+1} = \frac{2p-1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2\left(p-1/2\right)}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \to \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2} \Rightarrow 2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \to \frac{2\left(p-1/2\right)}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \to \frac{1}{3}\,\frac{2p-1}{p^2-p+1}$$

מכאן נובע תשובה:

$$\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \to \frac{p^2}{p^3+1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{3}e^{-(t-2)} + \frac{2}{3}e^{(t-2)/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2) \to \frac{p^2}{p^3+1}e^{-2p}} \blacksquare$$

III. דוגמאות לשימוש שיטת השאריות

להלן אנחנו שוב פותרים דוגמאות שהתגבנו לעיל אך כעת נשתמש רק בשיטת שאריות. נזכיר את המשפט יסודי.

משפט תהי פונקציה $F(p)$ היא שבר רציונלי עם קוטבים

$$p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n$$

עם רבועים (בהתאמה)

$$r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n$$

ובנוסף מתקיים שוויון:

$$\lim_{|p|\to\infty} F(p)=0$$

(זאת אומרת ש-$F(p)$ הוא שבר אמיתי) אז פונקציה $F(p)$ היא תמונה של מקור $f(t)$ וכאן

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \text{ עבור} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left\{F(p)(p-p_k)^{r_k}e^{pt}\right\}, & t>0 \end{cases}$$

בפרט אם $r_1=r_2=\dots=r_n=1$ אז:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \text{ עבור} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}, & t>0 \text{ עבור} \end{cases}$$

וכאן $F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$, $A(p)$, $B(p)$ הם פולינומים.

דוגמה יש למצוא מקור לתמונה הבאה:

$$F(p)=\frac{1}{p\cdot(p-1)(p^2+4)}$$

פתרון

כיון שבמקרה הנדון $A(p)\equiv 1$, $B(p)=p(p-1)(p-2i)(p+2i)$

אז קוטבים של $F(p)$ הם הבאים:

$$p_1=0,\quad p_2=1,\quad p_3=2i,\quad p_4=-2i$$

ורידוצים שלהם הם $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 1$

נחשב את המכנה $B(p)$!

$$B(p) = p(p-1)(p^2+4) = (p^2-p)(p^2+4) =$$
$$= p^4 + 4p^2 - p^3 - 4p = \boxed{p^4 - p^3 + 4p^2 - 4p} \Rightarrow$$

$$B'(p) = \boxed{4p^3 - 3p^2 + 8p - 4}$$

לפי נוסחה!

$$f(t) = \sum_{k=1}^{4} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad t \geq 0$$

יש לחשב $B'(p_k)$ במקרים:

(1) $p_1 = 0$ (2) $p_2 = 1$ (3) $p_3 = 2i$ (4) $p_4 = -2i$

ובכן:

(1) $$\left.\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}\right|_{p_1=0} = \left.\frac{1}{4p^3-3p^2+8p-4}\right|_{p_1=0} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

(2) $$\left.\frac{A(p_2)}{B'(p_2)}\right|_{p_2=1} = \left.\frac{1}{4p^3-3p^2+8p-4}\right|_{p_2=1} = \frac{1}{4-3+8-4} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

(3) - (4) **הערה**

לעיתים קרובות אנחנו מתעסק עם תמונות מהצורה

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

וכאן $A(p)$ ו- $B(p)$ פולינומים, שבור $F(p)$ אי-אפשר לצמצם ובנוסף כל מקדמים של פולינומים אלה הם מספרים ממשיים. אז אם פולינום $B(p)$ בעצם את הפתרונות מורכבות אז צמודים בזוגות. כיון שפולינומים $A(p)$ ו- $B(p)$ בעצי מקדמים ממשיים (ורק ממשיים) אז מספרים מרוכבים

$$\{A(p_k), A(\bar{p}_k)\}, \quad \{B'(p_k), B'(\bar{p}_k)\}, \quad \{e^{p_k t}, e^{\bar{p}_k t}\}$$

הם צמודים בזוגות. לכן הסכום

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$$

מחוברים

$$\frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \quad , \quad \frac{A(\bar{p}_k)}{B'(\bar{p}_k)} e^{\bar{p}_k t}$$

אם כן צמודים בפונות ולכן מתקיימת נוסחה

$$\frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} + \frac{A(\bar{p}_k)}{B'(\bar{p}_k)} e^{\bar{p}_k t} = 2\,\mathrm{Re}\, \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$$

אם סכום

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$$

נפרק לשני סכומים כך שראשון מתייחס לכל פתרונות ממשיים של פולינום $B(p)$ וסכום שני כולל כל מחוברים שמתייחסים לפתרונות מרוכבות של פולינום $B(p)$ ואז נקבל

$$f(t) = \sum\nolimits_1 \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} + 2\,\mathrm{Re} \sum\nolimits_2 \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$$

(כאן p_k הוא פתרון מרוכב עם חלק מדומה חיובי)

כעת נחשב את ה 3 - 4 לפי הערה הנתונה.

3 $\quad p_3 = 2i \quad (2>0) \Rightarrow$

$$\frac{A(p_3)}{B'(p_3)} e^{p_3 t} = \frac{1}{4p^3 - 3p^2 + 8p - 4}\Bigg|_{p=2i} \cdot e^{2it} =$$

$$= \frac{1}{-4\cdot 8i + 3\cdot 4 + 16i - 4} e^{2it} = -\frac{1}{16i - 8} e^{2it} = \frac{1}{8 - 16i} e^{2it} =$$

$$= \frac{1}{8} \frac{1}{1 - 2i} e^{2it} = \frac{1}{8} \frac{1 + 2i}{5} e^{2it} = \frac{(1+2i)(\cos 2t + i \sin 2t)}{40}$$

לכן:

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{A(p_3)}{B'(p_3)} e^{p_3 t}\right) = \frac{\cos 2t - 2\sin 2t}{20} \Rightarrow$$

$$f(t) = -\frac{1}{4} e^{0\cdot t} + \frac{1}{5} e^{1\cdot t} + \frac{\cos 2t - 2\sin 2t}{20} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} e^{t} + \frac{\cos 2t - 2\sin 2t}{20}}$$

<u>דוגמה</u> יש למצוא מקור שמתאים לתמונה הבאה

$$F(p) = \frac{p^2+2}{p^3+3p^2+5p+3}$$

<u>פתרון</u>

נמצא את הפתרונות p_1, p_2, p_3 של משואה

$$B(p) = p^3+3p^2+5p+3 = 0$$

(תרגיל עמודים 12-13). כאשר מקבלים:

$$p_1 = -1, \qquad p_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}\,i$$

ריבועים של פתרונות אלה $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. כיון שבמקרה הנדון

$$A(p) = p^2+2, \quad B'(p) = 3p^2+6p+5$$

אז לפי נוסחה שיזוג (תרגיל של עמוד 23) מקבלים:

$$f(t) = \sum_1 \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} + 2\,\mathrm{Re}\sum_2 \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} =$$

$$= \frac{p^2+2}{3p^2+6p+5} e^{pt}\Big|_{p=-1} + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{p^2+2}{3p^2+6p+5} e^{pt}\Big|_{p=-1+\sqrt{2}i}$$

עכשיו נחשב מחוברים אלה בנפרד:

(1) $$\frac{p^2+2}{3p^2+6p+5} e^{pt}\Big|_{p=-1} = \frac{1+2}{3-6+5} e^{-t} = \frac{3}{2} e^{-t}$$

(2) $$2\,\mathrm{Re}\,\frac{p^2+2}{3p^2+6p+5} e^{pt}\Big|_{p=-1+\sqrt{2}i} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1-2\sqrt{2}i-2+2}{3(+1-2\sqrt{2}i-2)+6(-1+\sqrt{2}i)+5} e^{-t+\sqrt{2}ti} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1-2\sqrt{2}i}{-4} e^{-t}(\cos\sqrt{2}t + i\sin\sqrt{2}t) =$$

$$= -\frac{e^{-t}}{2}\left(\cos\sqrt{2}t + 2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right) = -e^{-t}\left(\frac{\cos\sqrt{2}t}{2} + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right)$$

מכאן נובע תשובה סופית:

$$f(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - e^{-t}\left(\frac{\cos\sqrt{2}t}{2} + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right) \blacksquare$$

<u>דוגמה</u> יש למצוא מקור שמתאים לפונקציה-תמונה הבאה:

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$$

<u>פתרון</u>

נבניר את הטענה יסודית

<u>משפט</u> הרי $F(p)$ היא פונקציה רציונלית כלומר

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$ (כאן $A(p), B(p)$ הם פולינומים אלגבריים)

ובנוסף

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{A(p)}{B(p)} = 0$$ (אם $A(p) = a_0x^m + \dots$, $B(p) = b_0x^n + \dots$ וכאן $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ אז $\underline{m < n}$)

נסמן ב- $p_1, p_2, \dots, p_n$ - את הפתרונות של משואה

$$B(p) = b_0x^n + \dots + b_n = 0$$

וב- $r_1, r_2, \dots, r_n$ את הריבועים שלהם. אז פונקציה $F(p)$ היא תמונה של מקור $f(t)$ והוא מהצורה הבאה:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \text{ עבור} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(r_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left[F(p)(p-p_k)^{r_k}e^{pt}\right], & t\geq 0 \text{ עבור} \end{cases}$$

<u>הערה</u>

נשים לב שאם בין פתרונות $p_1, p_2, \dots, p_n$ קיימים מספרים צמודים בצורות (כלומר אם קיימים בין פתרונות אחד מספרים מרוכבים) למשל:

$$p_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \ \beta > 0 \quad (p_1 = \alpha + i\beta)$$

עם ריבוי $r \geq 1$ אז מתקיים שיוון:

$$\frac{1}{(r-1)!}\left\{\lim_{p\to p_1}\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left[F(p)(p-p_1)^r e^{pt}\right] + \lim_{p\to p_2}\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left[F(p)(p-p_2)^r e^{pt}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2}{(r-1)!}\,\mathrm{Re}\left\{\lim_{p\to p_1}\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left[F(p)(p-p_1)^r e^{pt}\right]\right.$$

כעת נחזור לדוגמה שלנו. במקרה הנדון:

$$p_1 = i\ ,\quad p_2 = -i\ ,\quad r_1 = r_2 = 2\ ,\quad p_1 = \overline{p_2} \quad \Rightarrow$$

$$f(t) = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{1!}\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{(p+i)^2}e^{pt}\right] =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\lim_{p\to i}\left[\frac{t\,e^{pt}}{(p+i)^2} - \frac{2\,e^{pt}}{(p+i)^3}\right] = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{t e^{it}}{-4} + \frac{2e^{it}}{8i}\right] =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{t e^{it}}{-4} - \frac{i\,e^{it}}{4}\right] = -\frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{t(\cos t + i\sin t) + i(\cos t + i\sin t)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[t\cos t - \sin t\right] = \frac{\sin t - t\cos t}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} 0\ , & t<0 \text{ עבור} \\ \dfrac{\sin t - t\cos t}{2}\ , & t>0 \text{ עבור} \end{cases}}$$

IV משפט פיתוח: דוגמאות

נזכיר את הטענה כאת

משפט פיתוח

תהי פונקציה $F(p)$ מתפתחת לטור חזקות לפי חזקות $(\frac{1}{p})$:

$$F(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \cdots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \cdots$$

אם טור הנדון מתכנס כאשר $|p| > R > 0$ אז פונקציה $F(p)$ היא התמונה למקור $f(t)$ הבא:

$$f(t) = \begin{cases} 0\ , & t<0 \text{ עבור} \\ a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}t^n + \cdots\ , & t>0 \text{ עבור} \end{cases}$$

בנוסף למעריך גידול S_0 של הפונקציה $f(t)$ מתקיימת אומדן:

$$S_0 \le 1 + l_0\ ,\quad l_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

דוגמה

יש למצוא את המקור שמתאים לתמונה:

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{1/p^2}$$

פתרון

ידוע שלפונקציה e^z מתקיימת נוסחה:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$$

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{1/p^2} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Big|_{z = 1/p^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{p^{2n+1}}$$

זאת אומרת שלפונקציה $F(p)$ טור שלה ניתן לרשום בצורה הבאה

$$F(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{p^m}, \quad c_m = \begin{cases} 0, & m = 2n \\ \frac{1}{n!}, & m = 2n+1 \end{cases}$$

לכן טור הנתון ל- $F(p)$ מתכנס כאשר

$$|p| \geq 1 + \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[m]{|c_m|} = 1 + \lim_{n \to \infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{n!}} =$$

$$= \left| n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \right| = 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2n\pi)^{2/(2n+1)}} \left(\frac{e}{n}\right)^{\frac{n}{2n+1}} =$$

$$= 1 + 0 = 1$$

לכן כיון שטור מתכנס בתחום $|p| > R > 1$ אז פונקציה $F(p)$ היא תמונה למקור הבא

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}$$

כי $t^{2n} \to \frac{(2n)!}{p^{2n+1}} \Leftarrow \frac{1}{2n!} t^{2n} \to \frac{1}{p^{2n+1}} \Leftarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2n!} t^{2n} \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{p^{2n+1}} \quad \blacksquare$$

§4 משואה אינטגרלית של וולטרה מסוג כריכה

נתבונן במשואה:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (4.1)$$

כאן $f(t)$, $K(t)$ הן פונקציות נתונות ו- $\varphi(x)$ היא פונקציה נעלמת. בנוסף פונקציה $K(x-t)$ נקראת גרעין של משואה (4.1). משואה (4.1) נקראת משואה אינטגרלית של וולטרה מסוג כריכה. נשים לב שבמשואה (4.1) גרעין שלו תלוי בהפרש של ארגומנטים.

<u>משפט</u> תהי פונקציות $f(t)$ ו- $K(t)$ הן רציפות בתחום $t\geq 0$ והן מקורות. אז משואה אינטגרלית (4.1) בעלת פתרון רציף יחיד. חוץ מזה פתרון שלו הוא מקור. אם s_1, s_2 הם מעריכים גידול של פונקציות $f(t)$ ו- $K(t)$ בהתאמה אז מעריך גידול s של פתרון $\varphi(t)$ מקיים לאומזן $s > \max\{s_1, s_2\}$

יש לזכור שפתרון של משואה (4.1) תמיד ניתן למצוא באופן הבא. נסמן ב- $\Phi(p)$, $F(p)$ ו- $\tilde{K}(p)$ תמונות של מקורות $\varphi(t)$, $f(t)$ ו- $K(t)$ (בהתאמה). אז אם נשתמש בהתמרת לפלס למשואה (4.1) אז נקבל:

$$(\mathcal{L}\varphi)(p) = (\mathcal{L}f)(p) + \mathcal{L}\left(\int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt\right) =$$

$$= (\mathcal{L}f)(p) + \mathcal{L}\big((K*\varphi)(x)\big)(p) = (\mathcal{L}f)(p) + (\mathcal{L}K)(p)\cdot(\mathcal{L}\varphi)(p)$$

(לעיל השתמשנו במשפט בורל) $\Leftarrow$

$$\Phi(p) = F(p) + \tilde{K}(p)\cdot\Phi(p) \Longrightarrow$$

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(p)}, \qquad \tilde{K}(p) \neq 1$$

לכן מקור $\varphi(t)$ שמתאים לתמונה $\Phi(p)$ הוא פתרון של (4.1).

<u>דוגמה</u> יש לפתור את המשוואה האינטגרלית הבאה:

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

<u>פתרון</u> תהי $\varphi(x)\to\Phi(p)$. כיון ש:

$$\sin x \to \frac{1}{p^2+1}\ , \qquad \cos x \to \frac{p}{p^2+1}$$

אז מקבלים משוואה לתמונות שמתאימה למשוואה אינטגרלית שנתונה:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + 2\,\frac{p}{p^2+1}\cdot\Phi(p)$$

(כאן השתמשנו במשפט בורל). מכאן מקבלים:

$$\Phi(p)\left[1-\frac{2p}{p^2+1}\right] = \Phi(p)\,\frac{p^2-2p+1}{p^2+1} =$$

$$= \Phi(p)\,\frac{(p-1)^2}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1} \quad\Longmapsto\quad \Phi(p)\to\frac{1}{(p-1)^2}\ ,\quad p\neq 1$$

מתכונות כפליות יוצא:

$$t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}} \quad\Longmapsto\quad e^{\alpha t}t^n \to \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}} \quad\Longmapsto\quad \left.\begin{matrix} n:=1 \\ \alpha:=1 \end{matrix}\right\} \Longmapsto$$

$$t\,e^t \to \frac{1!}{(p-1)^{1+1}} = \frac{1}{(p-1)^2} \quad\Longmapsto\quad \boxed{\varphi(x) = x e^x} \qquad \blacksquare$$

<u>דוגמה</u> יש לפתור את המשוואה אינטגרלית הבאה:

$$\varphi(t) = t + \int_0^t \sin(t-s)\,\varphi(s)\,ds$$

<u>פתרון</u> תהי $\varphi(t)\to\Phi(p)$. כיון ש

$$t\to\frac{1}{p^2}\ , \qquad \sin t\to\frac{1}{p^2+1}$$

אז מקבלים משוואה לתמונות שמתאימה למשוואה אינטגרלית שנתונה

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \underbrace{\frac{1}{p^2+1}\,\Phi(p)}_{\text{לפי משפט בורל}} \Rightarrow \Phi(p)\left(1-\frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p^2}$$

$$\Longrightarrow \Phi(p)\,\frac{p^2}{p^2+1} = \frac{1}{p^2} \Rightarrow \Phi(p) = \frac{p^2+1}{p^4} = \frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varphi(t) = t + \frac{1}{3!}\,t^3}\ \blacksquare$$

<u>דוגמה</u> יש לפתור את המשוואה אינטגרלית הבאה:

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

<u>פתרון</u> נסמן ב- $\varphi(x) \to \Phi(p)$. כיון ש:

$$\cos x \to \frac{p}{p^2+1} \quad \Longrightarrow$$

אז מקבלים משוואה לתמונות שמתאימה למשוואה אינטגרלית מקורית:

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} + \underbrace{\frac{1}{p^2}\cdot\Phi(p)}_{\text{לפי משפט בורל}} \Rightarrow \left(1-\frac{1}{p^2}\right)\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} \Longrightarrow$$

$$\Phi(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{p^2-1}\right] \Longrightarrow$$

$$\varphi(x) = \frac{\cos x + \operatorname{ch} x}{2}$$

לעשיה:

$$\left.\begin{aligned} e^x &\to \frac{1}{p-1} \\ e^{-x} &\to \frac{1}{p+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2p}{p^2-1} = \frac{p}{p^2-1}\ \blacksquare$$

<u>דוגמה</u> יש לפתור את המשוואה אינטגרלית הבאה:

$$\varphi(t) = \sin 2t - \frac{8}{3}\int_0^t \operatorname{sh} 3(t-s)\,\varphi(s)\,ds$$

<u>פתרון</u>

תהי $\varphi(t) \to \Phi(p)$

כיון ש:

$$\sin 2t \to \frac{2}{p^2+4}\ , \quad sh\,3t \to \frac{3}{p^2-9}$$

אז מוצאים את המשוואה לתמונות שמתאימה למשוואה אינטגרלית מקורית:

$$\Phi(p) = \frac{2}{p^2+4} - \underbrace{\frac{8}{p^2-9}\cdot\Phi(p)}_{\text{משפט בורל}} \Rightarrow$$

$$\Phi(p)\left(1+\frac{8}{p^2-9}\right) = \frac{2}{p^2+4} \Rightarrow \Phi(p)\frac{p^2-1}{p^2-9} = \frac{2}{p^2+4} \Rightarrow$$

$$\Phi(p) = \frac{2(p^2-9)}{(p^2-1)(p^2+4)} := \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$

מכאן שלפי שיטת שיורית מקבלים:

$$A = \lim_{p\to 1}(p-1)\Phi(p) = \lim_{p\to 1}\frac{2(p^2-9)(p-1)}{(p-1)(p+1)(p^2+4)} = \frac{2\cdot(1-9)}{2\cdot(1+4)} = -\frac{8}{5}$$

$$B = \lim_{p\to -1}(p+1)\Phi(p) = \lim_{p\to -1}\frac{2(p^2-9)(p+1)}{(p-1)(p+1)(p^2+4)} = \frac{2(1-9)}{(-2)(1+4)} = \frac{8}{5}$$

$$C = \lim_{|p|\to\infty} p\cdot\left[\frac{2(p^2-9)}{(p^2-1)(p^2+4)} - \left(\frac{8}{5}\,\frac{1}{p+1} - \frac{8}{5}\,\frac{1}{p-1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{|p|\to\infty}\left[\frac{2p(p^2-9)}{(p^2-1)(p^2+4)} - \frac{8}{5}\,p\,\frac{p-1-p-1}{p^2-1}\right] = 0$$

ולכן:

$$\Phi(p) = \frac{2(p^2-9)}{(p^2-1)(p^2+4)} = -\frac{8}{5}\,\frac{1}{p-1} + \frac{8}{5}\,\frac{1}{p+1} + \frac{D}{p^2+4}$$

נציב כאן $p=3$ $\Leftarrow$

$$\Phi(3) = 0 = -\frac{8}{5}\,\frac{1}{p-1} + \frac{8}{5}\,\frac{1}{p+1} + \frac{D}{p^2+4}\Big|_{p=3} =$$

$$= -\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{D}{13} \Rightarrow \frac{D}{13} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{D = \frac{26}{5}}$$

ולכן:

$$\Phi(p) = -\frac{8}{5}\,\frac{1}{p-1} + \frac{8}{5}\,\frac{1}{p+1} + \frac{13}{5}\,\frac{2}{p^2+2^2} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\varphi(t) = -\frac{8}{5}e^{t} + \frac{8}{5}e^{-t} + \frac{13}{5}\sin 2t}$$

נתבונן כעת במערכת משוואות אינטגרליות של וולטרה:

$$\varphi_e(x) = f_e(x) + \sum_{m=1}^{s} \int_0^x K_{em}(x-t)\,\varphi_m(t)\,dt \;, \quad e = \overline{1,s}$$

(מסוג כריכה). אם נשתמש בשני צדים של מערכת את התמרת הלפלס אז נקבל:

$$\Phi_e(p) = F_e(p) + \sum_{m=1}^{s} \tilde{K}_{em}(p)\,\Phi_m(p) \;, \quad e = \overline{1,s}$$

כאן

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_e(x) \rightarrow \Phi_e(p) \;, \quad f_e(x) \rightarrow F_e(p) \;, \quad e = \overline{1,s} \\ \int_0^x K_{em}(x-t)\,\varphi_m(t)\,dt = (K_{e,m} * \varphi)(t) \rightarrow \underbrace{\tilde{K}_{em}(p)\,\Phi_m(p)}_{\text{משפט כורכה}} \\ K_{em}(x) \rightarrow \tilde{K}_{em}(p) \\ e = \overline{1,s} \;, \quad m = \overline{1,s} \end{array}\right.$$

מערכת אחרונה (לגבי תמונות $\Phi_e(p)$, $e=\overline{1,s}$) היא אלגברית ולינארית. אם נפתור את מערכת הנתונה אז נקבל את התמונות $\Phi_e(p)$, $e=\overline{1,s}$. אז מקורות המתאימות:

$$\varphi_e(x) \rightarrow \Phi_e(p) \;, \quad e = \overline{1,s}$$

נותנים לנו פתרון של מערכת משוואות אינטגרליות מקורית.

דוגמה יש לפתור את המערכת משוואות אינטגרליות הבאה:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x) = x + \int_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt \\ \varphi_2(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\,\varphi_1(t)\,dt - \int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt \end{array}\right\}$$

פתרון

קודם כול נרשום את המערכת בעזרת הסימון כריכה:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x) &= x + (e^{-t} * \varphi_1)(x) + (t * \varphi_2)(x)\\ \varphi_2(x) &= 1 + (\operatorname{sh} t * \varphi_1)(x) - (e^{t} * \varphi_2)(x)\end{aligned}\right\}$$

כעת אחרי התמרת לפלאס ובעזרת המשפט בורל מקבלים:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(p) &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}\Phi_1(p) + \frac{1}{p^2}\Phi_2(p)\\ \Phi_2(p) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2-1}\Phi_1(p) - \frac{1}{p-1}\Phi_2(p)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{p+1}\right)\Phi_1(p) - \frac{1}{p^2}\Phi_2(p) &= \frac{1}{p^2}\\ -\frac{1}{p^2-1}\Phi_1(p) + \left(1+\frac{1}{p-1}\right)\Phi_2(p) &= \frac{1}{p}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{p+1}\Phi_1(p) - \frac{1}{p^2}\Phi_2(p) &= \frac{1}{p^2}\\ -\frac{1}{p^2-1}\Phi_1(p) + \frac{p}{p-1}\Phi_2(p) &= \frac{1}{p}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned}\frac{1}{p+1}\Phi_1(p) - \frac{1}{p^3}\Phi_2(p) &= \frac{1}{p^3}\\ -\frac{1}{p+1}\Phi_1(p) + p\,\Phi_2(p) &= 1-\frac{1}{p}\end{aligned}\right\}}$$

נחשב את הדטרמיננטה Δ של מערכת כאן:

$$\Delta = \begin{vmatrix}\frac{1}{p+1} & -\frac{1}{p^3}\\ -\frac{1}{p+1} & p\end{vmatrix} = \frac{p}{p+1} - \frac{1}{p^3(p+1)} = \frac{1}{p+1}\left[p - \frac{1}{p^3}\right] =$$

$$= \frac{p^4-1}{p^3(p+1)} \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{p^4-1}{p^3(p+1)}} \Rightarrow$$

$$\Phi_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p^3(p+1)}{p^4-1}\begin{vmatrix}\frac{1}{p^3} & -\frac{1}{p^3}\\ 1-1/p & p\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{p^3(p+1)}{p^4-1}\cdot\frac{1}{p^3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1-1/p & p\end{vmatrix} = \frac{p+1}{p^4-1}\left(p+1-\frac{1}{p}\right) =$$

$$= \frac{p+1}{p^4-1}\;\frac{p^2+p-1}{p} = \frac{p^2+p-1}{p(p-1)(p^2+1)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_1(p) = \frac{p^2+p-1}{p(p-1)(p^2+1)}},$$

$$\Phi_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p^3(p+1)}{p^4-1}\begin{vmatrix}\frac{1}{p+1} & \frac{1}{p^3}\\ -\frac{1}{p+1} & 1-\frac{1}{p}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{p^3(p+1)}{p^4-1}\cdot\frac{1}{p+1}\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{p^3}\\ -1 & 1-\frac{1}{p}\end{vmatrix} = \frac{p^3}{p^4-1}\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}\right) =$$

$$= \frac{p^3-p^2+1}{p^4-1} \Rightarrow \boxed{\Phi_2(p) = \frac{p^3-p^2+1}{p^4-1}}$$

כעת נפרק את הפונקציות $\Phi_1(p), \Phi_2(p)$ לשברים פשוטים. נתחיל ב- Φ_1:

$$\Phi_1(p) = \frac{p^2+p-1}{p(p-1)(p^2+1)} = \frac{A_1}{p} + \frac{B_1}{p-1} + \frac{C_1 p + D_1}{p^2+1} \Rightarrow$$

$$A_1 = \lim_{p\to 0} p\,\Phi_1(p) = \frac{p^2+p-1}{(p-1)(p^2+1)}\bigg|_{p=0} = \frac{-1}{(-1)\cdot 1} = \boxed{1}$$

$$B_1 = \lim_{p\to 1}(p-1)\Phi_1(p) = \frac{p^2+p-1}{p(p^2+1)}\bigg|_{p=1} = \frac{1+1-1}{1\cdot(1+1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{|p|\to\infty} p\,\Phi_1(p) = \lim_{|p|\to\infty}\frac{p^2+p-1}{(p-1)(p^2+1)} = 0 = A_1 + B_1 + C_1 \Rightarrow$$

$$C_1 = -A_1 - B_1 = -1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{3}{2}}$$

לכן לפי שמצאנו ניתן לרשום:

$$\Phi_1(p) = \frac{p^2+p-1}{p(p-1)(p^2+1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p-1} + \frac{-\frac{3}{2}p + D_1}{p^2+1} \Rightarrow$$

נבחר $p := 2 \Leftarrow$

$$\Phi_1(2) = \frac{4+2-1}{2\cdot 1\cdot 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{D_1-3}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 + \frac{D_1-3}{5} \Rightarrow$$

$$2D_1 - 6 = -5 \Rightarrow 2D_1 = 1 \Rightarrow \boxed{D_1 = 1/2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_1(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p-1} + \frac{-3p+1}{2(p^2+1)}}$$

באופן דומה:

$$\Phi_2(p) = \frac{p^3-p^2+1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)} = \frac{A_2}{p-1} + \frac{B_2}{p+1} + \frac{C_2 p + D_2}{p^2+1} \Rightarrow$$

$$A_2 = \lim_{p\to 1}(p-1)\Phi_2(p) = \frac{1-1+1}{(1+1)(1+1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{1}{4}}$$

$$B_2 = \lim_{p\to -1}(p+1)\Phi_2(p) = \frac{-1-1+1}{(-1-1)(1+1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{B_2 = \frac{1}{4}}$$

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{p(p^3-p^2+1)}{p^4-1} = 1 = A_2 + B_2 + C_2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + C_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{C_2 = \frac{1}{2}}$$

לפי שמצאנו נתן לסכום:

$$\Phi_2(p) = \frac{p^3-p^2+1}{p^4-1} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{p-1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{p+1} + \frac{\frac{1}{2}p + D_2}{p^2+1} \Rightarrow$$

נבחר $p := 0 \Leftarrow$

$$\Phi_2(0) = -1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + D_2 \Rightarrow \boxed{D_2 = -1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_2(p) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{p-1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{p+1} + \frac{p-2}{2(p^2+1)}}$$

ובכן:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(p) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{1}{p-1} - \frac{3}{2}\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}\\ \Phi_2(p) &= \frac{1}{4}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

תשובה:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x) &= 1 + \frac{1}{2}e^{x} - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{\cos x}{2} - \sin x\end{aligned}\right\}$$

<u>דוגמה</u> יש לפתור את המערכת משוואות אינטגרליות הבאה!

$$\left.\begin{aligned}x(t) &= t + \int_0^t y(\xi)\,d\xi\\ y(t) &= 1 + \int_0^t x(\xi)\,d\xi\end{aligned}\right\}$$

<u>פתרון</u> תהי $x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$ $\Leftarrow$

$$\int_0^t y(\xi)\,d\xi = (1 * y)(t) \to \frac{Y(p)}{p}, \quad \int_0^t x(\xi)\,d\xi = (1 * x)(t) \to \frac{X(p)}{p}$$

אז:

$$\left.\begin{aligned}X(p) &= \frac{1}{p^2} + \frac{Y(p)}{p}\\ Y(p) &= \frac{1}{p} + \frac{X(p)}{p}\end{aligned}\right\} \Rightarrow X(p)+Y(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{X(p)+Y(p)}{p} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left[X(p)+Y(p)\right] = \frac{p+1}{p^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{X(p)+Y(p) = \frac{p+1}{p(p-1)}} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\frac{p+1}{p(p-1)} &= (X+Y)(p) = \frac{1}{p^2} + \left(1+\frac{1}{p}\right)Y(p)\\ \frac{p+1}{p(p-1)} &= (X+Y)(p) = \frac{1}{p} + \left(1+\frac{1}{p}\right)X(p)\end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(p) = \frac{2p}{p^2-1} - \frac{1}{p}, \quad X(p) = \frac{2}{p^2-1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = 2\,\mathrm{sh}\,t, \quad y(t) = 2\,\mathrm{ch}\,t - 1} \quad \blacksquare$$