תרגול 6

תזכורת: פונקציה היא אינטגרבילית רימן אמ"מ היא חסומה ורציפה פרט לקבוצה ממידה אפס. (פרט לקבוצה בת מניה של נק' לצורך הקורס)

אינטגרל רימן:

$$\int_a^b f = \lim_{\lambda(x)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$$

משפט: נוסחאת ניוטון לייבניץ

תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ ותהי $F(x)$ הפונקציה הקדומה של f בקטע אזי

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

תרגיל: השתמשו באינטגרל המסויים על מנת לחשב את הגבול

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot 1^2}{n^4}} + \sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot 2^2}{n^4}} + \dots + \sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{16\cdot n^2}{n^4}}\right)$$

הרעיון: להציג את הסכום הנ"ל כסכום רימן עבור פונקציה כלשהי ואז להשתמש בכך שזה אינטגרל מסויים של הפונקציה בקטע, ולחשב לפי נוסחת ניוטון

נחשב את הערך של האינטגרל.

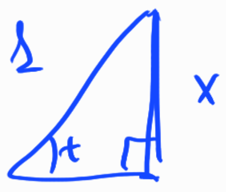
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}} = 4 \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i} \sum \underbrace{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}_{f(\alpha_i)}$$

נסמן $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ונשים לב כי: חלוקה של הקטע $[0,1]$ עם נק' דגימה $\alpha_i := \frac{k}{n}$ נותן לנו את סכום רימן עבור חלוקה שווה של הקטע $[0,1]$.
ולכן זה שווה לאינטגרל המסוים

$$L = 4\cdot\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

<u>הערה:</u> f רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית ולכן ניתן לומר כי $\sum \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.
החלוקה השווה ל-n קטעים היא סדרה שבה פרמטר החלוקה שואף ל-0 ולכן כאשר $n\to\infty$ סכום רימן הזה אכן שואף לאינטגרל המסוים.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$



$$\sin t = x \qquad \cos t = \sqrt{1-x^2} \implies dx = \cos t\,dt$$

$$= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt$$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$

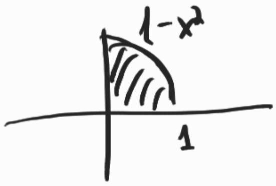
$$\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} + c = \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + \frac{\arcsin x}{2} + c$$

ולסיום חזרה לעיגול:

$$L = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\left(\frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + \frac{\arcsin x}{2}\right]_0^1$$

$$= \sin\pi + \pi - 0 - 0 \boxed{= \pi}$$

הערה: אפשר לשים לב כי זהו שטח רבע העיגול



כפול 4.

$$L = 4\cdot\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי:

תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$

אזי:
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

היא פונקציה קדומה של $f(x)$ בקטע $[a,b]$

$F(x)$ היא פונק׳ השטח הנוצרת. $a \le x \le b$

כלומר: $F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

תרגיל: הראו כי לפונקציה $F(x)=\int_{1/2}^{x} e^{t^2}(t^2-1)\,dt$

יש נק' קיצון (מינימום מקומי) בנק' $x=1$.

פתרון: כיוון שהפונקציה $e^{t^2}(t^2-1)$ רציפה בכל קטע

על הממשיים, לפי המשפט היסודי של החדו"א $F(x)$

היא הפונקציה הקדומה שלה.

כלומר $F'(x)=e^{x^2}(x^2-1)$

$F'(x)>0 \iff x^2-1>0 \iff x^2>1 \iff$

$x>1$ או $x<-1$ (כלומר: $F'(x)<0$ רק $-1<x<1$)

ולכן F' מחליפה סימן בנק' $x=1$.

ולכן זה: נק' קיצון מקומית.

נשים לב שעובר ולהציב $x=1$ ולקבל ט מהי

אכן נק' מינימום.

תרגיל: מצאו קיצון מקומי של הפונקציה

$$F(x)=\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

נסמן $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}$, $g(x)=x^2$

ולכן $F(x)=f\circ g(x) = f(g(x))$

$$F'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x = \frac{2\sin(x^2)}{x}$$

$$F'(x)=0 \iff x=\sqrt{\pi n},\ n\in\mathbb{N}$$

נלמד אלו נק' הקיצון של הפונקציה.

<u>הסבר צצצ':</u>

$$h=\sin(e^{x})$$

$$h=f\circ g$$

$$g=e^{x}$$

$$f=\sin x$$

$$\int_a^{x^2}(\quad)\,dt=\int_a^{g(x)}(\quad)\,dt$$

<u>הערה:</u> באופן כללי, לפי כלל השרשרת, אם

f רציפה בקטע סגור,

$$F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

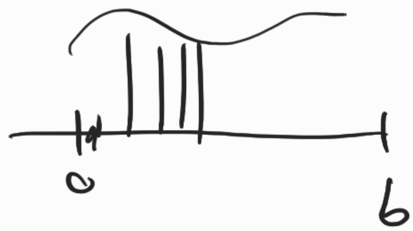
<u>וגזירה!</u>

<u>אזי:</u>

$$F'(x)=f(\beta(x))\,\beta'(x)-f(\alpha(x))\,\alpha'(x)$$

<u>תרגיל:</u> חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt$$



האינטגרל שואף לאפס . ו- x^3 שואף לאפס לכן נשתמש בלופיטל:

$$\sin\sqrt{x^2}\cdot (x^2)' = \left(\int_0^{x^2} (\ \ )dt\right)'$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)\cdot 2x}{\underbrace{3x^2}_{=(x^3)'}} = \frac{2\sin x}{3x} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

גבול ידוע.

<u>תרגיל:</u> חשבו את הגבול

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum \Delta x_i f(x_i)$$

ולכן זהו סכום רימן של הפונקציה $\frac{1}{1+x}$ בקטע $[0,1]$ עם החלוקה השווה ל- n קטעים ובחירת עם חלוקה $\alpha_k = \frac{k}{n}$.

$$L = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln|1+x|\Big]_0^1$$

$$\boxed{= \ln 2}$$