

חשבון אינפיניטסימלי 4 (88-236-01/05)
מועד א', תשע"ה

מרצים: פרופ' אנדריי לרנר, ד"ר ודים זאב אוסטפנקו
משך המבחן: 150 דקות
חומר עזר: אסור (כולל מחשבון כיס)

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. כל שאלה שווה ל-21 נקודות.

1. תהי $\gamma(t) = (\cos t, \sin t - t, t^2)$.
א) האם γ חלקה בקטע $(-1, 1)$? והאם γ חלקה בקטע $(0, 1)$?
ב) האם $\gamma((0, 2))$ היא עקומה עם שפה?
ג) מצאו וקטור משיק ל- γ בנקודה $t = \pi$.
ד) הראו שהאורך של $\gamma((0, \pi/4))$ מקיים

$$L(\gamma((0, \pi/4))) \geq \frac{\pi}{4} \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

2. בעזרת משפט גרין חשבו

$$\int_{\gamma} (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$$

כאשר γ היא קו שבור ABC , $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (0, 1)$ (בכיוון מ- A ל- C).

3. יהי

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 1 \leq z \leq 5\}$$

בעזרת משפט גאוס מצאו את נפח של V .

4. בעזרת משפט גאוס חשבו את $\iint_M F \cdot N ds$ כאשר $F = (x^2, y^2, z^2)$

$$M = \{x^2 + y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 2\}$$

ו- N נורמל חיצוני.

5. תהי γ עקומה הנתונה ע"י

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = y\}$$

ואוריינטציה על γ נגד כיוון השעון אם מסתכלים מכיוון חיובי של ציר Oz . חשבו את

$$\int_{\gamma} (z - y)dx - (x + z)dy - (x + y)dz$$

6. יהי $G \subset \mathbb{R}^3$ תחום כוכבי. נניח $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ו- $F \in C^\infty(G)$. הראו ש- $\text{curl}(F) = 0$ אם ורק אם קיימת פונקציה סקלרית $f \in C^\infty(G)$ כזאת ש-

$$F = \text{grad} f$$

(רמז: הישתמשו בלמה פואנקרה).

בהצלחה!