תרגול 3 - לכסינות, קיילי המילטון, פילינום מינימלי ריבוי גאומטרי

תרגיל. מצא את הע"ע והריבויים שלהם למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

פתרון. ראשית נמצא את הפולינום האופייני.

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda-2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\left[(\lambda-2)^2-1\right] + (-\lambda+2-1) - 1(1+\lambda-2) \\
&= (\lambda-2)\left[\lambda^2-4\lambda+3\right] - 2\lambda+2 \\
&= (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3) - 2(\lambda-1) \\
&= (\lambda-1)\left[(\lambda-2)(\lambda-3)-2\right] \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-4)
\end{aligned}$$

ישנם שני ע"ע $\lambda = 1$ בעל ריבוי אלגברי 2 ו-$\lambda = 4$בעל ריבוי אלגברי 1.
כעת נחשב את הריבויים הגאומטרים.

- $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{v | Av = v\} \\
&= \{v | (A-I)v = 0\} \\
&= N(A-I) \\
&= N\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&= Span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

והמימד של המרחב העצמי הוא 2. לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 1$ הוא 2.

- $\lambda = 4$:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{v|Av=4v\} \\
&= \{v|\left(A-4I\right)v=0\} \\
&= N\left(A-4I\right) \\
&= N\left(\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}\right)\right) \\
& \quad N\left(\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)\right) \\
&= Span\left\{\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right)\right\}
\end{aligned}$$

והמימד של המרחב העצמי הוא 1. לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 4$ הוא 1.

הגדרה. נאמר שמטריצה Aלכסינה אם הוא דומה למטריצה אלכסונית.

משפט. נניח ש-A לכסינה אז $A = P^{-1}DP$ כאשר $D = \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{array}\right)$ ו- $P^{-1} = \left(\begin{array}{ccccc} | & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & \ldots & v_n \\ | & | & | & & | \end{array}\right)$

הערה. לפעמים נהוג לרשום $D = P^{-1}AP$ ואז $D = \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{array}\right)$ ו- $P = \left(\begin{array}{ccccc} | & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & \ldots & v_n \\ | & | & | & & | \end{array}\right)$

משפט. A לכסינה אם ורק אם הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינארים ולכל עע הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי.(סכום הריבויים הגאומטריים שווה ל-0)

מסקנה. אם ל-A-יש n ע"ע שונים אז Aלכסינה.

תרגיל. לכסן את המטריצה $\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)$מעל $\mathbb{C}$.

פתרון. נמצא את עע והו"ע $\left|\begin{array}{cc}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{array}\right| = \lambda^2+1$ $p_A(\lambda) =$ לכן הע"ע הם $\lambda_{1,2} = i,-i$

$\lambda = i$: צריך למצוא את הבסיס ל-

$$N(iI-A) = N\begin{pmatrix} i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} i & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = Span\{(-i,1)\}$$

$\lambda = -i$: צריך למצוא את הבסיס ל-

$$N(-iI-A) = N\begin{pmatrix} -i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} -i & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = Span\{(i,1)\}$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

תרגיל. חשב את $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{100}$

פתרון. לפי התרגיל הקודם אנחנו יודעים ש-

$$A = \begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

לכן

$$\begin{aligned} A^{100} &= \left(\begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\right)^{100} \\ &= \begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} \quad = \quad I \end{aligned}$$

משפט. קיילי המילטון. $p_A(A) = 0$ כלומר אם נציב את A בפולינום האופייני נקבל את מטריצת האפס.

דוגמה. לפי התרגיל הקודם אם נציב את $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ בפולינום $p_A(\lambda) = \lambda^2+1$ נקבל 0.

$$p_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^2 + 1\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

הגדרה. הפולינום המינימלי של A הוא פולינום מתוקן מדרגה מינימלית שמאפס שאת A והוא מסומן כ-$m_A(\lambda)$

משפט. נשים לב ש-

$$m_A | p_A$$

לכן אם

$$p_A(\lambda) = (\lambda-a_1)^{k_1}(\lambda-a_2)^{k_2}\cdots(\lambda-a_l)^{k_l}$$

אז

$$m_A(\lambda) = (\lambda-a_1)^{u_1}(\lambda-a_2)^{u_2}\cdots(\lambda-a_l)^{u_l}$$

כך ש-$1 \le u_i \le k_i$

תרגיל. מצא את p_A, m_A עבור המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

פתרון. ראשית נמצא את הפולינום האופייני.

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

כעת הפולינום המינימלי יכול להיות

$$m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

או

$$m_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)$$

כדי לדעת מה הפולינום המינימלי נציב את A ונראה האם $m_A(A)$, לשם נוחות נלך מהחזקות הנמוכות לגבוהות. נציב ב-

$$m_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)$$

ונקבל

$$\begin{aligned} m_A(A) &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן

$$m_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)$$