פתרון בוחן בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ט

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק.
משך הבוחן: 90 דקות.

שאלה 1. קבוצת שורשי היחידה מסדר n מעל $\mathbb{C}$ היא

$$\Omega_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\} = \left\{ \operatorname{cis}\frac{2\pi k}{n} \,\middle|\, k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

זו תת־חבורה של $\mathbb{C}^*$. אם נסמן $\omega_n = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}$, נקבל $\Omega_n = \langle \omega_n \rangle$. כלומר Ω_n היא תת־חבורה ציקלית ונוצרת על ידי ω_n. מפני ש-Ω_n מסדר n וציקלית, אז בהכרח $\Omega_n \cong \mathbb{Z}_n$.

נגדיר את קבוצת שורשי היחידה $\Omega_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. הוכיחו:

1. Ω_∞ היא חבורה לגבי כפל. (איחוד חבורות הוא לא בהכרח חבורה!)
2. לכל $x \in \Omega_\infty$, $o(x) < \infty$ (כלומר: כל איבר ב-Ω_∞ הוא מסדר סופי).
3. Ω_∞ אינה ציקלית.

לחבורה כזו, שבה כל איבר הוא מסדר סופי, קוראים חבורה מפותלת.

פתרון.

1. נוכיח שהיא חבורה על ידי זה שנוכיח שהיא תת־חבורה של $\mathbb{C}^*$. ראינו בתרגול שתת־חבורת הפיתול (כלומר קבוצת האיברים מסדר סופי) של חבורה אבלית היא תת־חבורה. לפי הגדרת Ω_∞, רואים שהיא מכילה בדיוק את כל האיברים מסדר סופי של החבורה האבלית $\mathbb{C}^*$, ולכן חבורה.

   באופן מפורש ולפי הגדרה: ברור כי $1 \in \Omega_\infty$, ולכן היא לא ריקה. יהיו $g_1, g_2 \in \Omega_\infty$. לכן קיימים m, n שעבורם $g_1 \in \Omega_m$, $g_2 \in \Omega_n$. נכתוב עבור $l, k \in \mathbb{Z}$ מתאימים:

$$g_1 = \operatorname{cis}\frac{2\pi k}{m}, \qquad g_2 = \operatorname{cis}\frac{2\pi l}{n}$$

לכן

$$g_1g_2 = \operatorname{cis}\frac{2\pi k}{m}\cdot\operatorname{cis}\frac{2\pi l}{n} = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi k}{m}+\frac{2\pi l}{n}\right)$$
$$= \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\left(kn+lm\right)}{mn}\right) \in \Omega_{mn} \subseteq \Omega_\infty$$

סגירות להופכי היא ברורה, שהרי אם $g \in \Omega_n$, אז גם $g^{-1} \in \Omega_n \subseteq \Omega_\infty$.

הערה: באופן כללי ניתן לראות מכאן כי איחוד של שרשרת חבורות, היא חבורה.

2. לכל $x \in \Omega_\infty$ קיים n שעבורו $x \in \Omega_n$. לכן, $o\left(x\right) \le n$.

3. לפי הסעיף הקודם, כל תת־החבורות הציקליות של Ω_∞ הן סופיות. אך Ω_∞ אינסופית, ולכן לא ייתכן שהיא שווה לאחת מהן.

שאלה 2. תנו דוגמא לפעולה נאמנה של חבורה לא טריוואלית G על קבוצה X עם איבר $x \in X$ כך ש- $\operatorname{stab}\left(x\right) = G$

<u>תזכורות:</u>

- פעולה היא נאמנה אם האיבר היחיד שפועל טריוואלית על כל איברי X הוא איבר היחידה.
- $\operatorname{stab}\left(x\right) = \left\{g \in G \,|\, g * x = x\right\}$

פתרון.

ישנן כמה דוגמאות:

1. ניקח את הפעולה של $GL_n\left(\mathbb{R}\right)$ על $\mathbb{R}^n$. נתבונן על האיבר $\vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. לכל $A \in GL_n\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים $A\vec{0} = \vec{0}$ ולכן $\operatorname{stab}\left(\vec{0}\right) = GL_n\left(\mathbb{R}\right)$.

   ברור כי הפעולה נאמנה כי אם $\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = x$ אז בהכרח $A = I_n$.

2. ניקח חבורה G בעלת מרכז טריוואלי (למשל S_n), כאשר G פועלת על עצמה על ידי הצמדה.

$$\forall g \in G : geg^{-1} = e \implies \operatorname{stab}\left(e\right) = G$$

   בנוסף, הפעולה נאמנה כיוון שהמרכז טריוואלי, כי:

   יהי $e \ne x \in G$, $x \notin Z\left(G\right)$ ולכן קיים $y \in G$ כך ש $xy \ne yx$. כלומר, $xyx^{-1} \ne y$ ולכן x לא פועל טריוואלית על כל איברי G.

   קיבלנו שהאיבר היחיד שפועל טריוואלית הוא $e \in G$ ולכן הפעולה נאמנה.

שאלה 3. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. תהי G חבורה אבלית, ויהי $f : G \to H$ אפימורפיזם, אזי H אבלית.

2. קיים מונומורפיזם $f : D_7 \to S_5$

פתרון.

1. הוכחה:

לכל $h_1, h_2 \in H$ קיימים $g_1, g_2 \in G$ כך ש-$f(g_i) = h_i$ כיוון ש- f על. נחשב

$$h_1h_2 = f(g_1)f(g_2) \overset{\star}{=} f(g_1g_2) \overset{*}{=} f(g_2g_1) \overset{\star}{=} f(g_2)f(g_1) = h_2h_1$$

כאשר בשיוויון המסומן $*$ השתמשנו באבליות של G, ובשיוויונות המסומנים $\star$ השתמשנו בכך ש-f הומומורפיזם. כלומר כל זוג איברים ב-H מתחלפים, ולכן H אבלית.

2. הפרכה:

נשים לב כי $|S_5| = 5! = 120$ וכי $|D_7| = 2 \cdot 7 = 14$.

נניח בשלילה כי קיים מונומורפיזם $f : D_7 \to S_5$, אזי כיוון שf חח"ע, $|D_7| = |\mathrm{im} f| = 14$, אבל $\mathrm{im} f \le S_5$, לכן לפי משפט לגרנז' $14|120$, בסתירה!