פיתרון תרגיל בית 7 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

1 במאי 2016

1. כמה סדרות $(a_1, a_2, ..., a_k)$ של k מספרים מתוך $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ יש המקיימות: $\forall 1 \leq i \leq k-1 : a_{i+1} \geq a_i + 4$?

פיתרון נסמן $x_0 = a_1$, ולכל $1 \leq i \leq k-1$ נסמן $x_i = a_{i+1} - a_i$, ועוד נסמן $x_k = n - a_k$. נקבל שמספר הסדרות הנתונות שקול למספר הפתרונות למשוואה:

$$x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_k = n \ (*)$$

כאשר $x_0 \geq 0, \forall 1 \leq i \leq k-1 : x_i \geq 4, x_k \geq 0$ שלמים אי שליליים. נמיר את המשתנים באופן הבא: נסמן $y_0 = x_0, y_k = x_k$ ולכל $1 \leq i \leq k-1$ נסמן $y_i = x_i - 4$ ונקבל שמספר הפתרונות למשוואה $(*)$ שקול למספר הפתרונות למשוואה:

$$y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_k = n - 4(k-1)$$

כאשר $\forall 1 \leq i \leq k : y_i \geq 0$ שלמים אי שליליים (הורדנו $k-1$ פעמים 4), שזה, לפי מה שלמדנו,

$$\binom{k+1+n-4k+4-1}{n-4k+4} = \binom{n-3k+4}{k}$$

2. כמה סדרות $(a_1, ..., a_{10})$ של מספרים שלמים (לאו דוקא אי שליליים) יש המקיימות:

$$1 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq ... \leq |a_{10}| \leq 1000 \ (*)$$

פיתרון ראשית נחשב עבור מספרים שלמים אי שליליים, כאשר במצב זה הערך המוחלט בתנאי חסר משמעות. נסמן:

$$x_1 = a_1 - 1, x_2 = a_2 - a_1, x_3 = a_3 - a_2, ..., x_{10} = a_{10} - a_9, x_{11} = 1000 - a_{10}$$

ונקבל שמספר הסדרות הנ"ל הוא בדיוק מספר הפתרונות של המשוואה $\sum_{i=1}^{11} x_i = 999$, כאשר $\forall 1 \leq i \leq 11 : x_i \geq 0$.
מספר הפתרונות הוא, כפי שלמדנו:

$$\binom{11+999-1}{999} = \binom{1009}{999} = \binom{1009}{10}$$

כך מצאנו את מספר הסדרות בשלמים אי שליליים, אבל התרגיל אמר שהמספרים יכולים להיות גם שליליים! נשים לב שכל סדרה בשלמים אי שליליים המקיימת את תנאי $(*)$, מקיימת את התנאי גם אם נחליף חלק מאיברי הסדרה במינוס שלהם. כלומר, אם $(a_1, ..., a_{10})$ סדרה מספרים שלמים אי שליליים המקיימת את תנאי $(*)$, אז כל הסדרות מהצורה $(\pm a_1, ..., \pm a_{10})$ מקיימות גם הן את התנאי. לכן כל סדרה כנ"ל של מספרים שלמים אי שליליים מייצגת קבוצה של 2^{10} (כל איבר יכול להיות אחת משתי אופציות: $+a_i$ או $-a_i$) סדרות כאלה במספרים שלמים לאו דוקא אי שליליים. לכן הפיתרון הסופי הוא:

$$2^{10}\binom{1009}{10}$$

3. הועד האקדמי של הפקולטה להנדסה פרסם תחרות מאמרים אקדמיים: יחולקו 5 פרסים כספיים (מניחים שבפקולטה יש לפחות 5 סטודנטים שיגישו מאמר) בסדר עולה, עם הפרש של לפחות 1000 ש"ח בין פרס לפרס, כאשר הפרס הראשון (עבור המאמר המוצלח ביותר) יהיה לכל היותר 20000 ש"ח, והאחרון (עבור המאמר החמישי במוצלחותו) יהיה לכל הפחות 1000 ש"ח. כמה אפשרויות יש לחלוקת הפרסים בין הסטודנטים?

פיתרון הבעיה שקולה לבעיה הבאה: כמה סדרות של מספרים $(a_1, ..., a_5)$ יש המקיימות: $a_1 \geq 1000, a_5 \leq 20000$, ובנוסף לכל $1 \leq i \leq 4$ מתקיים $a_{i+1} \geq a_i + 1000$. נסמן $x_0 = a_1 - 1000, \forall 1 \leq i \leq 4 : x_i = a_{i+1} - a_i - 1000, x_5 = 20000 - a_5$.
נקבל שמספר הסדרות הנ"ל שקול למספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=0}^{5} x_i = 15000$ כאשר לכל $0 \leq i \leq 5$ המשתנה x_i שלם אי שלילי. מספר הפתרונות הוא:

$$\binom{6+15000-1}{6} = \binom{15005}{6}$$

4. נגדיר באופן רקורסיבי את הפונקציה $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{N}$ הבאה:
בסיס: לכל p ראשוני נגדיר $f(p) = p$
כלל רקורסיבי: אם $n \geq 2$ לא ראשוני נגדיר $f(n) = \sum_{p|n} f(p)$, כלומר סכום ערכי הפונקציה על הראשוניים שמחלקים את n.
לדוגמא:

$$f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 2, f(10) = f(2) + f(5) = 7$$

הוכח שלכל $n \geq 2$ מתקיים $f(n) \leq n$.
נוכיח באינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n = 2$. אכן $f(2) = 2 \leq 2$ כי 2 ראשוני.

יהי $n > 2$ ונניח את נכונות הטענה עבור כל $2 \leq k < n$, כלומר $f(k) \leq k$ לכל $2 \leq k < n$. נוכיח את הטענה ל־n.

אם n ראשוני, אז $f(n) = n \leq n$ לפי ההגדרה של הפונקציה. אחרת, אם n לא ראשוני, יש ראשוני p שמחלק את n כך ש־$\frac{n}{p} \geq 2$. בפרט, $p \leq \frac{n}{2}$. נשים לב כי הראשוניים שמחלקים את $\frac{n}{p}$ הם בדיוק הראשוניים שמחלקים את n, פרט אולי ל־p. לכן $f(n) \leq f(\frac{n}{p}) + f(p)$. כעת ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה עבור p ועבור $\frac{n}{p}$. כמו כן, מפני ש־2 הוא הראשוני הקטן ביותר, מתקיים $\frac{n}{p} \leq \frac{n}{2}$. בסך הכל קיבלנו

$$f(n) \leq f(\frac{n}{p}) + f(p) \leq \frac{n}{p} + p \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

ולפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל $n \geq 2$.

5. כמה קבוצות של 4 מספרים מתוך $[100]$ אינן מכילות שני מספרים עוקבים?

פיתרון נסדר כל קבוצה כזו בסדר עולה, ונקבל סדרה $(a_1, ..., a_4)$ המקיימת: $a_1 \geq 1, \forall 1 \leq i \leq 3 : a_{i+1} \geq a_i + 2, a_4 \leq 100$.
נסמן: $x_0 = a_1 - 1, \forall 1 \leq i \leq 3 : x_i = a_{i+1} - a_i - 2, x_4 = 100 - a_4$. מספר הסדרות הנ"ל (הזהה למספר הקבוצות שאינן מכילות שני מספרים עוקבים) שקול למספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=0}^{4} x_i = 93$. לכן נקבל:

$$\binom{93+5-1}{93} = \binom{97}{93}$$