צורות קנוניות

מעגל: $x^2+y^2=R^2$

- הנקודה היא מקרה פרטי של המעגל: $x^2+y^2=0$

אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

היפרבולה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

- מקרה פרטי של ההיפרבולה: כאשר $a=b\to 0$ נקבל $x^2-y^2=0$, שזה הקוים המצטלבים $y=\pm x$.

פרבולה: $x=ay^2$

סיווג תבניות ריבועיות

לא תמיד נקבל משוואה קנונית. בד"כ אפשר בקלות להמיר לצורה:

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

שזה בעצם:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+f=0$$

נסתכל על המחובר הראשון - נסמן $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, ואז:

$$A_{ij}x^ix^j$$

$$x^1=x \qquad x^2=y$$

$$A_{11}=a \qquad A_{12}=A_{21}=b \qquad A_{22}=c$$

כלומר $A=A^t$ - מטריצה סימטרית - ולכן יש v,u וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים λ_1,λ_2, כלומר $\begin{matrix} Av=\lambda_1 v \\ Au=\lambda_2 v \end{matrix}$, ו- u,v אורתוגונלים:

$$\lambda_2\langle u,v\rangle=\langle Au,v\rangle=\left\langle A^tu,v\right\rangle=\langle u,Av\rangle=\langle u,\lambda v\rangle=\lambda_1\langle u,v\rangle$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\langle u,v\rangle=0$$

משפט

יש קבוצת וקטורים עצמיים של מטריצה סימטרית שהיא בסיס אורתונורמלי למרחב.

כלומר: יש מטריצה מלכסנת P כך ש $P^t = P^{-1}$.

נגדיר: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^t A P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

ומכאן אפשר להגיע לצורה:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

$$\lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 + gx' + hy' + f = 0$$

וזה כבר יותר דומה לצורה הריבועית - רק צריך להיפטר מהגורמים הלינאריים, g וh:

$$\lambda_1 \left(x' + \alpha\right)^2 = \lambda_1 \left(x'\right)^2 + 2\alpha\lambda_1 x' + \lambda_1 \alpha^2$$

ולכן כדי לאפס את g נבחר α המקיים $g = 2\alpha\lambda_1$, ואותו דבר כדי לאפס את h - נבחר β המקיים $h = 2\beta\lambda_2$. נקבל:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{h}{2\lambda_1}\right)^2 + f - \frac{g^2}{4\lambda_1} + \frac{h^2}{4\lambda_2} = 0$$

ובכתיב יותר פשוט:

$$\lambda_1 \left(x' - \alpha\right)^2 + \lambda_2 \left(y' - \beta\right)^2 + k = 0$$

וקיבלנו צורה קנונית ריבועית, שהיא מוזזת ומסובבת.

כאשר אחד מהערכים העצמיים שווה אפס, אי אפשר לאפס את שני הגורמים הלינאריים, ומקבלים פרבולה. כאשר $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, מקבלים קו ישר.

לפי סימני הערכים העצמיים אפשר לדעת איזה צורה קיבלנו:

אליפסה: $\lambda_1\lambda_2 > 0$

היפרבולה: $\lambda_1\lambda_2 < 0$

פרבולה: $\lambda_1\lambda_2 = 0$, אבל $\lambda_1 \neq 0 \vee \lambda_2 \neq 0$

קו ישר: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

אפשר לבדוק את הסימנים ישירות לפי $\det A$:

$$\lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \det\left(P^{-1}AP\right) = \cancel{\det\left(P^{-1}\right)} \det A \cancel{\det P} = \det A$$

דוגמה

$$x = \frac{1}{y}$$

$$xy - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \implies \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \beta$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

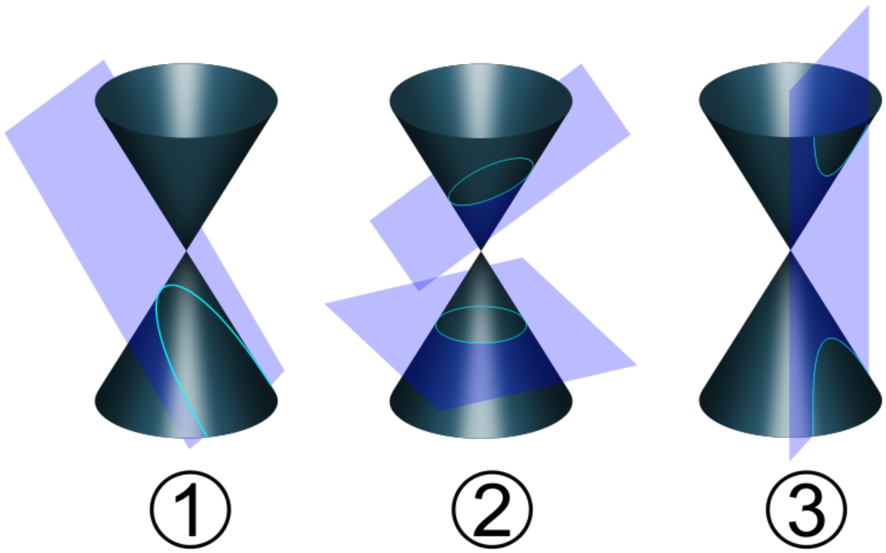
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

חתכי חרוט - Conic Sections

נסתכל על המשוואה $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (או $x^2 + y^2 = z^2$). המשוואה הזו מתארת זוג חרוטים במרחב:



אפשר לראות בציור שבאמצעות חיתוכים של מישור עם החרוט אפשר לקבל:

1. אם חותכים בדיוק ב45° מקבלים פרבולה
2. אם חותכים בזווית הקטנה מ45° מקבלים אליפסה(כאשר חותכים ב0° מקבלים מעגל)
3. אם חותכים בזווית הגדולה מ45° מקבלים היפרבולה

אפשר לבצע על החרוט סיבוב והזזה, ולקבל

$$\left(\overbrace{x-\alpha}^{x'}\right)^2+\left(\overbrace{y-\beta}^{y'}\right)^2-\left(\overbrace{z-\gamma}^{z'}\right)^2=0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=0$$

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 30 & 0 & -\sin 30 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 30 & 0 & \cos 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

$$x'=\cos 30\cdot x''-\sin 30\cdot z''$$

$$P^tAP=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = 0$$

תבניות ריבועיות במרחב

תבניות ריבועיות במרחב הן מהצורה:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dy + 2exz + 2fyz + gx + hy + jz + k = 0$$

לאחר סיבוב והזזה אפשר להגיע לאחת מהצורות הבאות:

אליפסואיד: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

היפרבולויד:
- יריעה אחת $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- שתי יריעות $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

פרבולואיד:
- אליפטי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$
- היפרבולי: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$

עקומות

אפשר לייצג קו ישר ב$\mathbb{R}^n$ ע"י

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad f(t) = \vec{v} + t\vec{u} \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

אם רוצים לייצג קוים לא ישרים, משתמשים בפונקציה לא לינארית: $\begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ f^3(t) \end{pmatrix}$. למשל:

$$\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \sin t^2 \\ \cos t^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} f^1(t^3) \\ f^2(t^3) \\ f^3(t^3) \end{pmatrix}$$

בנוסף לעקומות יש לנו עולם נוסף של יצורים החיים על $\mathbb{R}^n$ - פונקציות סקלריות $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

יש לנו מיפוי $f \circ g = f(g(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

רוצים להסתכל על הנגזרת של זה, אבל הבעיה היא שf לא תמיד מגיע לכל המרחב. בכל זאת - נסתכל על הנגזרת:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g\left(f\left(t\right)\right)=\frac{\partial g}{\partial x^1}\frac{\mathrm{d}f^1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial g}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial g}{\partial x^3}\frac{\mathrm{d}f^3}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}g=\frac{\partial g}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1+\frac{\partial g}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2+\frac{\partial g}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^3$$

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f^1}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\mathrm{d}f^3}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^3}$$

$\mathrm{d}g$ נקרא הגרדיאנט של g, והוא בעצם וקטור קצב השינוי. למשל: עבור $g=\frac{w}{h^2}$ הגרדיאנט הוא:

$$\mathrm{d}g=\frac{1}{h^2}\,\mathrm{d}w-\frac{2w}{h^3}\,\mathrm{d}h\implies\begin{pmatrix}\frac{1}{h^2} & \frac{2w}{h^3}\end{pmatrix}$$

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ הוא וקטור המהירות של f. אם נכפיל אותם - $\mathrm{d}g\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ - נקבל את הנגזרת של $f\circ g$.

בעצם...

- וקטור הוא <u>מהירות</u> של עקומה - $v^i=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\\ \\ \end{pmatrix}$ - והם יהיו וקטורי עמודה
- קו־וקטור הוא מיפוי לינארי ממרחב הוקטורים לסקלרים - $u_i=\mathrm{d}g$ - והם יהיו וקטורי שורה

ולכן נסמן $\mathrm{d}g\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=u_iv^i$