## משפט

יהי $p:E\to B$ כיסוי, $p(e)=b$. אזי $p_*:\pi_1(E,e)\to\pi_1(B,b)$ היא מונומורפיזם.

### הוכחה

נניח $\varphi\in\pi_1(E,e)$ מקיים $p_*(\varphi)=1$. צ"ל $\varphi=1$.

נתון $p\circ\varphi$ נול הומוטופי. נרים תא ההומוטופיה ל$E$ כך שהפינה השמאלית התחתונה תועתק ל$e$.

---

נסמן $p_*(\pi_1(E,e))$ ב$J_e$.

## למה

יהי $\gamma$ מסילה מ$b$ ל$b$. אזי $\widehat{\gamma}^e$ מסילה סגורה אם"ם $\gamma\in J_e$.

### הוכחה

נניח $\widehat{\gamma^e}$ סגורה. אזי $\pi_1(E,e)\ni[\widehat{\gamma}^e]$ ומתקיים $[\gamma]=p_*([\widehat{\gamma}^e])$.

כיוון שני: נניח $p_*([\varphi])=[\gamma]$ כלומר $\gamma\underset{\partial I}{\sim}p\circ\varphi$. ההרמה של $p\circ\varphi$ היא $\varphi$ ולכן סגורה.

$p\circ\varphi\underset{\partial I}{\sim}\gamma$ ולכן $\widehat{\gamma}^e$ מסתיימת באותה נקודה - כלומר ב$e$.

---

בהנתן $\pi_1(B,b)\ni[\gamma]$, הגדרנו $F_{[\gamma]}:p^{-1}(b)\to p^{-1}(b)$. נשים לב שאכן $F_{[\gamma]}$ בלתי תלויה בנציג $\gamma$.

$F_{[\gamma][\varphi]}(x)=F_{\varphi}\left(F_{(\gamma)}(x)\right)$ - מכפלה של איברים מתאימה להרכבה של פונקציות. לפעולה הזו קוראים פעולה של חבורה על קבוצה.

נשים לב שיש שתי סוגים של פעולות: שמאלית(הכופל השמאלי פועל ראשון - $(\gamma\cdot\varphi)x=\gamma(\varphi x)$) וימנית(הכופל הימני פועל ראשון - $x(\gamma\cdot\varphi)=(x\cdot\gamma)\cdot\varphi$). במקרה שלנו זו פעולה ימנית, ואכן נרשום כפעולה ימנית: $x([\gamma][\varphi])=(x[\gamma])[\varphi]$. זוהי פעולה ימנית בגלל שהחלטנו ששרשור של מסילות הוא משמאל לימין: קודם השמאלי ואחרי זה הימני.

עד עכשיו באלגברה מופשטת דיברנו על פעולות שמאליות - אבל כל המשפטים נכונים גם עבור פעולות ימניות(פשוט צריך לשים לב לסדר)

## טענה 1

הפעולה היא טרנזיטיבית(כלומר יש מסלול ישיר)

### הוכחה

יהיו $x,y\in p^{-1}(b)$. $E$ קשיר מסילתית, לכן יש מסילה $\varphi$ ב$E$ מ$x$ ל$y$, ויתקיים $x[p\circ\varphi]=y$.

# טענה 2

המיצב של נקודה $x \in p^{-1}(b)$ הוא $J_x$.

---

$G$ פועלת <u>מימין</u> על $X$. $x \in X$. נגדיר העתקה $\underset{g \mapsto xg}{G \to \mathrm{Orb}(x)}$. היא **על** אך לא בהכרח חח"ע. מתי $xg = xh$?
$x = xhg^{-1}$, כלומר אם"ם $hg^{-1} \in \mathrm{Stab}(x)$. כלומר אם"ם $h$ ו$g$ נמצאים באותה מחלקה ימנית של $\mathrm{Stab}(x)$ ב$G$. לכן זה משרה העתקה חח"ע ועל

$${}_{\mathrm{Stab}(x)}\backslash^{G} \to \mathrm{Orb}(x)$$

בפרט

$$[\pi_1(B,b) : J_e] = \left|p^{-1}(b)\right|$$

---

במקרה שלנו יש התאמה חח"ע ועל

$${}_{J_e}\backslash^{\pi_1(B,b)} \to p^{-1}(b)$$

---

נניח $\gamma$ מסילה בין $e$ ל$d$. מה הקשר בין $J_e$ ו$J_d$?
כל איברי $\pi_1(E,e)$ הם מהצורה $\gamma \cdot \varphi \cdot \overline{\gamma}$ כאשר $\varphi$ עובר על כל איברי $\pi_1(E,d)$

$$J_e = p_*(\pi_1(E,e)) = (p \circ \gamma) J_d (p \circ \gamma)^{-1}$$

לכן זוהי תת חבורה נורמלית אם ורק אם כל כל ההצמדות נותנות אותו דבר. במקרה של חבורה אבלית זה תופס לכל החבורות.

## משפט ההרמה

יהי $p$ כיסוי

$$\begin{tikzcd}
 & (E,e) \arrow[d, "p"] \\
(X,a) \arrow[r, "f"] & (B,b)
\end{tikzcd}$$

($f$ העתקה רציפה כלשהי)
האם יש הרמה? כלומר האם יש $\widehat{f} : X \to E$ כך ש
א. $p \circ \widehat{f} = f$

ב. $\widehat{f}(a)=e$

נניח $B,E$ קשירים מסילתית מקומית. אזי יש הרמה $\widehat{f}$ כנ"ל אס"ם

$$f_*(\pi_1(x,a))\subseteq p_*(\pi_1(E,e))$$

ובמקרה זה ההרמה הנ"ל היא **יחידה**.

## הוכחה

**כיוון ראשון**: אם יש הרמה אז מתקיימת ההכלה הנ"ל, כי $f=p\circ\widehat{f}$ ולכן $f_*=p_*\circ\widehat{f}_*$ לכן

$$f_*(\pi_1(x,a))=p_*\left(\widehat{f}_*(\pi_1(X,a))\right)\subseteq p_*(\pi_1(E,e))$$

**כיוון שני**: אם היתה לנו $\widehat{f}$, והיינו לוקחים את $x$ ומחברים לה מסילה $\gamma$. אז היה לנו $\widehat{f}\circ\gamma$, ואם נפעיל עליה את $p$ נקבל $f\circ\gamma=p\circ\hat{f}\circ\gamma$ - לכן יש לנו כבר את נקודת הסיום $\widehat{f}(x)$. אם נוכיח שבהינתן נקודת הסיום הזו $\widehat{f}$ אינה תלויה בבחירת המסילה $\gamma$ - אז יש לנו את $\widehat{f}$!

**בניה**: בהינתן $x\in X$ ניקח מסילה $\gamma$ מ$a$ ל$x$, ונגדיר $\widehat{f}(x):=\widehat{f\circ\gamma}^{e}$

קיום ויחידות נובעים מכך שנקודת הסיום נתונה לנו - בתנאי שנוכיח

א. $\widehat{f}$ מוגדרת היטב - כלומר בלתי תלויה בבחירת המסילה $\gamma$.

ב. $\widehat{f}$ רציפה.

**יחידות**: יהיו $\delta,\gamma$ שתי מסילות מ$a$ ל$x$. צריך להוכיח $\widehat{f\circ\delta}^{e}(1)=\widehat{f\circ\gamma}^{e}(1)$. זה נכון אס"ם <u>ההרמה</u> $\widehat{(f\circ\gamma)\cdot\overline{f\circ\delta}}^{e}$ מסתיימת ב$e$, וזה אס"ם

$$\begin{array}{ccl}\left[(f\circ\gamma)\cdot\overline{(f\circ\delta)}\right] & \in J_e & \\ \| & & \\ f\circ\left(\gamma\cdot\overline{\delta}\right) & & \\ & = & f_*\left(\gamma\cdot\overline{\delta}\right)\in f_*(\pi_1(X,a))\subseteq p_*(\pi_1(E,e))=J_e\end{array}$$

$$\left[\gamma\circ\overline{\delta}\right]\in\pi_1(X,a)$$

**רציפות**: קיימת $V$ קשירה מסילתית כך ש$f(V)\subseteq U$, $U$ סביבה של $f(X)$ שהיא מכוסה היטב. נסמן ב$W$ את הקבוצה הפתוחה באיחוד הזר שבו נמצאת $\widehat{f}(x)$. נקבל ש

$$\left.\widehat{f}\right|_V=\left(p|_W\right)^{-1}\circ f|_V$$

וזה רציף על $V$.

## תרגיל

כל העתקה $f:p\to S^1$ היא נול־הומוטופית.

### הוכחה

החבורה היסודית של $p$ היא $\mathbb{Z}/2$. החבורה היסודית של $S_1$ היא $\mathbb{Z}$. החבורה היסודית של מרחב הכיסוי של $S^1$ היא $\mathbb{R}$.

כיוון שב$\mathbb{Z}$ אין איברים מסדר 2 בהכרח $f_*=0$, ולכן $\mathrm{Im}f_*\subseteq\mathrm{Im}p_*$, ולכן יש הרמה.
אזי יש הרמה - כלומר $\widehat{f}:p\to\mathbb{R}$ כך ש$f=p\circ\hat{f}$.
$\mathbb{R}$ כוויץ, לכן $\widehat{f}$ נול הומוטופית, ולכן גם $f=p\circ\hat{f}$ נול־הומוטופית.
$\mathrm{Im}f_*\subseteq\mathrm{Im}_*$ ונניח $p'_*\left(\pi_1\left(E',e'\right)\right)=p_*\left(\pi_1\left(E,e\right)\right)$.
קיים אוטומורפיזם של $E$ המעתיק את $x$ ל$y$ אס"ם $J_x=J_y$.

## מסקנה

$J_e$ נורמלית ב$\pi_1\left(B,b\right)$ אס"ם חבורת האוטומורפיזמים של $E$ פועלת על $p^{-1}\left(b\right)$ באופן טרנזיטיבי.

## הגדרה

מרחב כיסוי שמקיים את התנאי נקרא מרחב כיסוי רגולרי.