כפל פולינומים

$$A\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n-1}a_{i}x^{i}$$

$$B\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n-1}b_{i}x^{i}$$

רוצים למצוא $C\left(x\right)=A\left(x\right)\cdot B\left(x\right)$. אם מבצעים הכפלת מקדמים, זה יוצא $O\left(n^{2}\right)$.

מצד שני, אם הופכים אותו לייצוג נקודות באמצעות FFT(עלות $O\left(n\log n\right)$), ניתן להכפיל כל זוג נקודות בנפרד ולחבר את התוצאות ב$O\left(n\right)$, ואז להחזיר לייצוג מקדמים באמצעות FFT.

דוגמה

$$A\left(x\right)=4+3x+2x^{2}+x^{3}$$

$$B\left(x\right)=3+x^{2}+2x^{3}$$

$\deg A\cdot\deg B=\deg C$ ולכן $\deg C=6$, כלומר אנו צריכים 7 נקודות. אבל - בשביל FFT צריך חזקה שלמה של 2 נקודות הגדולה ממעלת C, ולכן נשלים כל פולינום למעלה 7 - כלומר 8 מקדמים(ולכן גם 8 נקודות)

$$A:\left(4,3,2,1,0,0,0,0\right)$$

$$B:\left(3,0,1,2,0,0,0,0\right)$$

נרצה נקודה w כך ש$w^{8}=1$, ולכן ניקח $w=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$. לפי FFT מתקיים:

$$A\left(x\right)=A_{even}\left(x^{2}\right)+xA_{odd}\left(x^{2}\right)$$

$$A\left(x\right)=4+3x+2x^{2}+x^{3}=A_{even}\left(x\right)+xA_{odd}\left(x^{2}\right)$$

$$A_{even}\left(x\right)=A_{0246}\left(x\right)=4+2x$$

$$A_{0246}\left(x\right)=A_{04}\left(x^{2}\right)+xA_{26}\left(x^{2}\right)$$

$$A_{04}\left(x\right)=A_{0}\left(x\right)+xA_{4}\left(x\right)=4$$

$$A_{26}\left(x\right)=A_{2}\left(x\right)+xA_{6}\left(x\right)=2$$

$$A_{0426}\left(x\right)=...$$

וכן הלאה, ואותו דבר עבור הצד השני $A_{1357}\left(x^{2}\right)$
בכל פעם אנחנו מצמצמים את הבעיה, ולכן הסיבוכיות היא

$$T\left(n\right)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+o\left(n\right)=o\left(n\log n\right)$$

נחשב כלפי מעלה, כל פעם עבור $x=1$, ולפי זה נדע גם עבור $x=-1$(כי עושים על x^{2})

$$A_{0}\left(1\right)=4,A_{4}\left(1\right)=0$$

$$A_{04}\left(1\right)=A_{0}\left(1\right)+1\cdot A_{4}\left(1\right)=4\Rightarrow A_{04}\left(-1\right)=4$$

$$A_{26}\left(1\right)=2,A_{26}\left(-1\right)=2$$

$$A_{0246}\left(1\right)=4+2=6$$

$$A_{0246}\left(-1\right)=4+2i$$

$$A_{0246}\left(i\right)=4-2=2$$

$$A_{0246}\left(-i\right)=4-2i$$

אותו דבר עם שאר הנקודות ועם הפולינום השני, ואז מכפילים את הנקודות ועושים FFT הפוך - כדי להחזיר את זה למקדמים של פולינום.

תרגיל

יהיו A וB סטים של n מספרים כ"א בטווח $0-10n$. רוצים לחשב את הסכום הקרטזי:

$$C=\left\{ x+y|x\in A\wedge y\in B\right\}$$

וכן את מס' הפעמים שכל איבר בC ממומש כסכום של איבר מA ואיבר מB.

פתרון

נציג כל קבוצה כפולינום, כשהאיברים בקבוצה הם החזקות, ומס' הפעמים שאיבר מופיע בקבוצה זה המקדם. למשל את הקבוצות

$$A = \{1, 3, 7, 6\}$$

$$B = \{2, 5\}$$

נציג בתור

$$A(x) = x + x^3 + x^6 + x^7$$

$$B(x) = x^2 + x^5$$

נעשה הכפלת פולינומים, FFT. איבר i מופיע בC אם המקדם של x^i $\neq 0$, ומס' ההופעות הוא המקדם של x^i. עלות - $O(10n\log(10n)) = O(n\log n)$

תרגיל

תהי $S = s_0 s_1 ... s_{n-1}$ מחרוזת בינארית. נאמר שS היא בעלת מחזור t אם לכל $i \equiv j \bmod t$ $s_i = s_j$

$T(S)$ - המחזור המינימאלי של S(t המינימאלי כך שt מחזור של S)

בהינתן S, נרצה לחשב את $T(S)$

אלגוריתם נאיבי

נבדוק את כל המחזורים - $O(n^2)$

פתרון יותר חכם

לS יש מחזור t אם $s_0 ... s_{n-t-1} = s_t ... s_{n-1}$

נגדיר

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{s_i} x^i$$

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{s_{n-i-1}} x^i$$

המכפלה שלהם היא פולינום $C(x)$ שמקדמיו הם

$$C_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-1}$$

$$C_{n-k-1} = \sum_{i=0}^{n-k-1} p_i q_{n-k-1-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-k-1} (-1)^{s_i} (-1)^{s_{n-(n-k-1-i)-i}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^{s_i} (-1)^{s_{k+i}} = \sum_{i=0}^{n-k-1} (-1)^{s_i+s_{k+i}}$$

$$= |\{i|s_i = s_{k+i}, 0 \leq i \leq n-k-1\}| - |\{i|s_i \neq s_{k+1}, 0 \leq i \leq n-k-1\}| = res$$

אם $res = n-k \Leftrightarrow$ יש מחזור באורך k

$n-k = C_{n-k-1} \Leftrightarrow$ יש מחזור באורך k.

נעבור על המקדמים C_i, ואז עבור $i = n-k-1$ נבדוק אם $C_i = n-k$. המחזור המינימלי הוא הi המקסימלי שמקיים את זה.