תרגיל בית 2 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. יהיו $n,m\in\mathbb{Z}$. הוכיחו כי $m\mathbb{Z}\le n\mathbb{Z}$ אם ורק אם $n|m$.

שאלה 2. בכל סעיף, קבעו והוכיחו האם תת־הקבוצה הנתונה היא תת־חבורה:

א. $8\mathbb{Z}_{12}=\{8k\,|\,k\in\mathbb{Z}_{12}\}\subseteq\mathbb{Z}_{12}$.

ב. $\left\{5^k\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\subseteq\mathbb{Q}^*$. תזכורת: הפעולה היא כפל.

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{Z}_p\right\}\subseteq GL_3\left(\mathbb{Z}_p\right)$. תזכורת: $GL_3\left(\mathbb{Z}_p\right)$ היא חבורת המטריצות ההפיכות בגודל 3×3 מעל השדה $\mathbb{Z}_p$, עם הפעולה של כפל מטריצות.

ד. $\left\{a+b\sqrt{7}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Q},a\neq 0\vee b\neq 0\right\}\subseteq\mathbb{R}^*$.

ה. $\{A\in M_n(\mathbb{Q})\,|\,\det A=0\}\subseteq M_n(\mathbb{Q})$.

ו. $\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f\ \text{הפיכה},f(1)>0\}\subseteq\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f\ \text{הפיכה}\}$.

ז. $\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f\ \text{הפיכה},f(1)=1\}\subseteq\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f\ \text{הפיכה}\}$.

(בשני הסעיפים האחרונים הפעולה היא הרכבת פונקציות).

שאלה 3. תהינה $(G,*)$ ו-$(H,\bullet)$ חבורות ותהיינה G',H' תת־חבורות של G,H בהתאמה. הוכיחו או הפריכו: $G'\times H'$ היא תת־חבורה של $G\times H$ (ביחס לפעולה רכיב-רכיב).

שאלה 4. תהי G חבורה, ויהיו $H,K\le G$ תת־חבורות של G. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $H\cap K$ היא תת־חבורה של G.

ב. $H\cup K$ היא תת־חבורה של G.

ג. $\Delta_H=\{(h,h)\,|\,h\in H\}$ היא תת־חבורה של $G\times G$.

שאלה 5. תהי G חבורה, ויהיו $a,b\in G$.

א. הוכיחו $o(ab)=o(ba)$. זהירות: לא הנחנו שהחבורה אבלית או שהסדרים סופיים.

ב. הפריכו שאם $o(a),o(b)<\infty$, אזי $o(ab)<\infty$ או $o(ab)=o(a)o(b)$.

שאלה 6 (חזרה לא להגשה). תהי S אגודה ו-$a\in S$ איבר. נגדיר את פעולת החזקה לפי $a^1=a$, ולכל $n>1$ נגדיר $a^{n+1}=a^n\cdot a$. הוכיחו כי מתקיים:

א. $a^na^m=a^{n+m}$ לכל $n,m\in\mathbb{N}$.

ב. $(a^n)^m = a^{nm}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ג. נניח כי S היא חבורה עם איבר יחידה e ונרחיב את ההגדרה לכל חזקה שלמה לפי $a^0 = e$ ו-$\left(a^{-1}\right)^n = a^{-n}$. הוכיחו כי $(a_1 \ldots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \ldots a_1^{-1}$ לכל $a_1, \ldots, a_k \in S$. הסיקו כי $(a^n)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n \in \mathbb{Z}$.

שאלה 7 (רשות)**.** מצאו חבורה אינסופית שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים בה איבר מסדר n. האם אתם יכולים גם להבטיח שהסדר של כל האיברים הוא סופי?

כמו כן, לכל $m > 1$ מצאו חבורה אינסופית G_m שהסדר של כל איבר בה הוא לכל היותר m.

האם אתם יכולים למצוא דוגמאות לשאלות האלו כך שהחבורות הן מעוצמה $\aleph_0$?

בהצלחה!