

## תרגיל בית 3 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תש"ף

**שאלה 1.** כתבו את לוחות הכפל של  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  ושל  $GL_2(\mathbb{F}_2)$ . האם הן אבליות? האם הן ציקליות? תזכורת: בשדה  $\mathbb{F}_2$  יש שני איברים  $\{0, 1\}$  ופעולות החיבור והכפל הן מודולו 2.

**שאלה 2.** תהי  $G$  חבורה אבליה. נסמן ב- $T$  את אוסף האיברים מסדר סופי ב- $G$ . הוכיחו כי  $T \leq G$ .

**שאלה 3.** לכל תמורה  $\sigma$  מהתמורות הבאות, כתבו את  $\sigma$  כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את  $\sigma^2$ , את  $\sigma^{10}$  ואת  $o(\sigma)$ .

$$\text{א. } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$$

$$\text{ב. } \sigma = (3\ 1\ 2)(1\ 4\ 5)(2\ 3)(4\ 3\ 5) \in S_5$$

$$\text{ג. } \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}, \tau_1 = (2\ 3\ 4) \text{ כאשר } \sigma = \tau_1 \circ \tau_2^2 \in S_4$$

**שאלה 4.** תהי  $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  חבורה אבליה סופית. יהי האיבר  $b = a_1 a_2 \dots a_n$ .

א. הוכיחו  $b^2 = e$ .

ב. הוכיחו שאם אין ב- $G$  איבר מסדר 2, אז  $b = e$ .

ג. בשפת התכנות C הניחו שהיצוג של הטיפוס unsigned char הוא של 8 סיביות (כלומר משתנה מטיפוס זה הוא בין 0 לבין 255 כולל). הסבירו מה תהיה התוצאה של קטע הקוד הבא בעזרת בסעיפים הקודמים:

```

1 unsigned char b=0;
2 unsigned int i=0;
3 for (i=0; i <= 255; i++) {
4     b += i;
5 }
6 printf("%d\n", b);

```

**שאלה 5.** תהינה  $G, H$  חבורות. האם כל תת-חבורה  $K$  של  $G \times H$  היא בהכרח מהצורה  $K_1 \times K_2$ , כאשר  $K_1$  תת-חבורה של  $G$  ו- $K_2$  תת-חבורה של  $H$ ? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

**שאלה 6.** תהי  $\sigma \in S_n$  תמורה, ונגדיר את התומך של  $\sigma$  להיות

$$\text{supp}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש- $\sigma$  "מזיזה". נאמר ששתי תמורות  $\sigma$  ו- $\tau$  הן זרות אם  $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$ .

א. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שאינן מתחלפות.

ב. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שמתחלפות.

ג. הוכיחו שאם  $i \in \text{supp}(\sigma)$ , אז גם  $\sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$ .

ד. הוכיחו שכל זוג תמורות זרות מתחלף.

**שאלה 7** (רשות). הוכיחו כי אם שני מחזורים שאינם זרים מתחלפים זה עם זה, אז כל אחד מהם הוא חזקה של השני.

בהצלחה!