

אוניברסיטת בר-אילן
 מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
 מספרי הקורס: 8821107 8821105
 המרצים: דבורה קפלן ומיכאל מגרל
 מתרגלים: לואי פולב ומיכאל פרידמן
 תאריך: 31.08.2010 מועד א'
 חומר עזר: רק מחשבון רגיל
 משך המבחן: שעתיים

**לפתור בדיוק 5 מתוך 6 שאלות
 כל סעיף שווה ל 7 נקודות**

השאלות:

1. א. תנו דוגמה של מבנה אלגברי עם 2 אלמנטים שהוא לא אגודה.
 ב. הוכח כי לכל מונויד (X, \cdot) קבוצה $P_*(X)$ של תת קבוצות לא ריקות
 מגדירה מונויד לגבי כפל טבעי $A \bullet B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$
 מה הם ההפיכים ב $(P_*(X), \bullet)$?
 ג. פתרו את $17^{2019} x \equiv 10 \pmod{50}$.

2. א. הוכיחו שאם הסדר של כל איבר (פרט לנייטרלי) בחבורה G הוא 2 אזי G
 אבליית ותנו דוגמה של חבורה אינסופית כזאת.
 ב. עבור החבורה (Z_{50}, \oplus) $G := \langle \overline{15} \rangle$ תארו: יוצרים אפשריים,
 אוטומורפיזמים ותת חבורות.
 ג. הסבירו מדוע חבורה (Q_+, \cdot) של רציונליים חיוביים היא לא נוצרת סופית.
 האם (Q_+, \cdot) איזומורפית לחבורה $(Q, +)$ של רציונליים ?

3. א. הוכח או הפרך: לא קיימת חבורה G ומונומורפיזם $G \rightarrow G$ שהוא לא
 איזומורפיזם.
 ב. הוכח או הפרך: קיים אפימורפיזם $Z^2 \rightarrow \Omega_{2010} \times Z_{999} \times \Omega_{50}$.
 ג. מצאו איזומורפיזם $R_+ \times \Omega_2 \cong R^*$ ותארו תת חבורה H בחבורה
 $G := C^* \times D_{100}$ כך שחבורת מנה G/H איזומורפית ל R^* .
 (סימון: C^* מרוכבים ללא 0)

4. א. הוכיחו את משפט Cayley.
 ב. תנו דוגמה של חבורה (G, \cdot) תת חבורה H ואיברים $a, b \in G$ כך שהקבוצה $(aH) \cdot (bH)$ לא שווה ל $(ab)H$.
 ג. הוכח או הפרך: קיים מונומורפיזם של חבורות $Z_{21} \rightarrow A_{10}$.

5. א. הוכיחו את משפט Burnside.
 ב. הוכח או הפרך: מספר מחלקות צמידות בחבורה S_5 גדול ממספר חבורות אבליות לא ציקליות עם 1200 איברים.
 ג. נניח $G \times X \rightarrow X$ פעולה של חבורה כפלית

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in Z_7 \right\}$$

מעל קבוצה X בעלת $|X| = 2010$ איברים. הוכח שקיימת נקודת שבת.

6. א. בעזרת משפטי Sylow הוכיחו שכל חבורה עם 55 איברים היא פתירה.
 ב. תנו דוגמה של חבורה סופית לא אבלית פתירה. אותה שאלה עם חבורה אינסופית.
 ג. נתבונן בחבורה A_5 .
- כמה איברים מסדר 3 יש ב- A_5 ?
 - כמה חבורות 3-סילו יש ב- A_5 ?
 - תהי H תת חבורה 2-סילו של A_5 . הוכיחו ש- H אבלית ומצאו לאיזו חבורה אבלית H איזומורפית.

☺ **בהצלחה ושנה טובה !**