

מבנים אלגבריים להנדסה, 83-218, בוחן 2 תשע"ט

י"ג סיון ה'תשע"ט, 16.6.19

מרצה: פרופ' נתן קלר.

מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: בחרו **3 מתוך 4** השאלות. כל שאלה שווה 34 נקודות.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1.

(א) קבוצת השלמים של גאוס היא הקבוצה הבאה: $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ (כאשר $i = \sqrt{-1}$). הוכיחו שקבוצה זו עם פעולות חיבור וכפל כמו במרוכבים היא חוג חילופי עם יחידה. (17 נק')

(ב) יהי R חוג. נניח שקיימים $a, b \in R$ כך ש- $ab = a, ba = b$. הוכיחו: $a^2 = a, b^2 = b$. (17 נק')

2. יהא R חוג חילופי עם יחידה. איבר $a \in R$ יקרא מחלק אפס אם קיים $b \in R, b \neq 0$ כך ש- $ab = 0$. הוכיחו או הפירוכו:

(א) אם $a \in R$ הפיך אז a אינו מחלק אפס. (17 נק')

(ב) אם $a \in R$ אינו מחלק אפס אז a הפיך. (17 נק')

3. תזכורת: פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ נקרא ראשוני אם לכל $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים: $p(x) \mid a(x)b(x) \Rightarrow p(x) \mid a(x) \vee p(x) \mid b(x)$.

(א) הוכיחו כי אם $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום (מדרגה גדולה ממש מאפס) אי פריק אזי הוא ראשוני. (17 נק')

(ב) הראו שיש בדיוק פולינום אי-פריק אחד ממעלה שנייה ב- $\mathbb{Z}_2[x]$. (17 נק')

4. נסמן: $f(x) = x^5 + x^2, g(x) = x^4 + x^3 \in \mathbb{R}[x]$.

(א) מצאו את $\gcd(f(x), g(x))$. (17 נק')

(ב) מצאו פולינומים $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ כך ש- $\gcd(f(x), g(x)) = a(x) \cdot f(x) + b(x) \cdot g(x)$. (17 נק')