בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה 88-195 תשס"ט סמסטר קייץ

מרצים : ד"ר אלי בגנו ומר שי סרוסי

משך המבחן : שלש שעות.

חומר עזר : מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על 5 שאלות **בדיוק**, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ציון :

בהצלחה

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 1

תת קבוצה A של קבוצת המספרים הממשיים תקרא "**קבוצה מגניבה**" אם לכל $x, y \in A$, כך ש $x \neq y$ מתקיים $x - y \notin Q$. (Q היא קבוצת המספרים הרציונליים.)

א. (15) הוכיחו שקיימת קבוצה מגניבה $B \subseteq \Re$ שהיא מקסימלית ביחס להכלה. כלומר לכל $C \subseteq \Re$ כך ש $C \supset B$ (מכילה ממש), C אינה מגניבה.

ב. (5) נניח ש B קבוצה מקסימלית כנ"ל. הוכיחו שלכל מספר ממשי $r \in \Re$ קיים $b \in B$ כך שהפרש רציונלי.

פתרון: א. נגדיר $T = \{A \subseteq R \mid \text{מגניבה } A\}$. T לא ריקה כי למשל $\{1\}, \phi \in T$. נגדיר יחס סדר על T ע"י $A_1 \leq A_2$ אס"ם $A_1 \subseteq A_2$ לכל $A_1, A_2 \in T$. תהי $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ שרשרת לא ריקה ב- T. נסמן $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, נוכיח $A \in T$. ואכן, יהיו $x, y \in A$ כך ש $x \neq y$, לכן קיימים $\alpha, \beta \in I$ כך ש $x \in A_\alpha$ ו $x \in A_\beta$. מאחר ו $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ שרשרת ניתן להניח בה"כ ש $A_\alpha \subseteq A_\beta$. לכן, מאחר ו $x, y \in A_\beta$, ו $x \neq y$ ו A_β קבוצה מגניבה, מתקיים $x - y \notin Q$.
כמובן שלכל $\alpha \in I$, $A_\alpha \subseteq A$ כלומר $A_\alpha \leq A$. לכן A מהווה חסם מלעיל לשרשרת.
לפי צורן קיים איבר מקסימלי, כלומר קבוצה מגניבה מקסימלית.

ב. יהי $r \in \Re$. אם $r \in B$ אז נקח $r \in B$ ואז $r - r = 0 \in Q$. אם $r \in \Re \setminus B$ אז $B \cup \{r\}$ אינה קבוצה מגניבה (כי B מגניבה מקסימלית) לכן קיימים בה 2 איברים שהפרשם רציונלי. לא יתכן ש-2 איברים אלו יהיו ב B (כי B מגניבה), לכן קיים $b \in B$ כך ש $r - b \in Q$.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 2

א. (6) בכמה אופנים אפשר לבחור 2 מספרים (שונים) מתוך המספרים $1,...,100$ כך שסכום המספרים חייב להיות זוגי? (בחרו את התשובה הנכונה והסבירו).

1. $\binom{50}{2}\cdot\binom{50}{2}+\binom{50}{2}$.
2. $\binom{50}{2}+\binom{50}{2}$.
3. $\binom{50}{2}\cdot 50!$.
4. $\binom{50+2-1}{50-1}$.

ב. (7) בכמה אופנים אפשר לבחור 3 מספרים (שונים) מתוך המספרים $1,...,100$ כך שסכום המספרים חייב להיות זוגי? (בחרו את התשובה הנכונה והסבירו).

1. $\binom{50}{2}\cdot\binom{50}{2}+\binom{50}{2}$.
2. $\binom{50}{3}+\binom{50}{2}\cdot\binom{50}{1}$.
3. $\binom{50+3-1}{50-1}$
4. $\binom{50}{2+1}\cdot 3!$.

ג. (7) נתונה קבוצה סופית A. נסמן ב C את קבוצת היחסים על A. מהו מספר הפונקציות החד חד ערכיות מ C אל A ? נמקו!

פתרון: א. התשובה הנכונה היא 2. נבחר 2 זוגיים מתוך 50 או שנבחר 2 אי-זוגיים מתוך 50.

ב. התשובה הנכונה היא 2. נבחר 3 זוגיים מתוך 50 או שנבחר 2 אי-זוגיים מתוך 50 ואז זוגי אחד מתוך 50.

ג. $C=P(A\times A)$ לכן $|C|=2^{|A|\cdot|A|}$ ומתקיים $2^{|A|\cdot|A|}>|A|$ לכל $|A|$. לכן לא קיימות פונקציות חד חד ערכיות מ C אל A. כלומר התשובה היא 0.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 3

ענה בדיוק על שנים מתוך שלשת הסעיפים הבאים:

א. (10) מצאו תנאי התחלה ויחס רקורסיה עבור מספר המילים מעל האלף בית $\{0,1,2\}$ באורך n בהן אין רצף של שתי ספרות 2.

ב. (10) לאריק 10 ברווזים שונים מגומי. כל יום הוא בוחר קבוצה של 3 מתוכם באופן אקראי לארח לו לחברה באמבטיה. בבוקר יום א' בנץ הודיע לאריק שעד סוף השבוע הוא רוצה שכל הברווזים יבקרו באמבטיה. אריק החליט לעצבן את בנץ.
בכמה אפשרויות שונות יכול אריק לקחת את הברווזים לאמבטיה, כך שבסוף השבוע יהיה לפחות ברווז אחד שלא ביקר באמבטיה אפילו פעם אחת בשבעת הימים?

(מספיק לכתוב נוסחא אך יש להסביר אותה!)

ג. תהיינה A,B,C,D קבוצות. הוכח או הפרך:

$$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D) \quad (5)$$

$$A\times B=B\times A \Leftrightarrow (A=\phi)\vee(B=\phi)\vee(A=B) \quad (5)$$

פתרון: א. אם מילה חוקית באורך n מתחילה ב-0 נוכל לשים כל מילה חוקית באורך $n-1$. כנ"ל עבור 1. אם מילה חוקית באורך n מתחילה ב-2 נוכל לשים 1 ואז כל מילה חוקית באורך $n-2$ או שנשים 0 ואז כל מילה חוקית באורך $n-2$. לכן
$f(n)=2f(n-1)+2f(n-2)$. תנאי התחלה: $f(1)=3$, $f(2)=8$.

ב. בעזרת עקרון ההכלה וההדחה. נגדיר A_i - הברווז ה- i לא ביקר באמבטיה כל השבוע.

מחפשים את $|\bigcup_{1\le i\le 10} A_i|$. $|A_i|=\binom{9}{3}^7$ - אם הברווז ה-i לא מתרחץ אז צריך לבחור בכל פעם 3 מתוך 9, ולחזור על התהליך 7 פעמים. $|A_i\cap A_j|=\binom{8}{3}^7$... נשים לב שחיתוך של 8 קבוצות או יותר הוא 0. לכן נקבל,

$$\binom{10}{1}\binom{9}{3}^7-\binom{10}{2}\binom{8}{3}^7+\binom{10}{3}\binom{7}{3}^7-\binom{10}{4}\binom{6}{3}^7+$$

$$\binom{10}{5}\binom{5}{3}^7-\binom{10}{6}\binom{4}{3}^7+\binom{10}{7}\binom{3}{3}^7=\sum_{i=1}^{7}\binom{10}{i}\binom{10-i}{3}^7$$

ג. $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$. הטענה לא נכונה. נגדיר למשל $A=\{1\}.B=\{2\},C=\{3\},D=\{4\}$. מתקיים $\{1,2\}\times\{3,4\}\neq\{(1,3)\}\cup\{(2,4)\}$.

$A\times B=B\times A\Leftrightarrow(A=\phi)\vee(B=\phi)\vee(A=B)$. הטענה נכונה. $\Leftarrow$ אם $A=\phi$ אז $\phi\times B=B\times\phi=\phi$, כנ"ל אם $B=\phi$. אם $A=B$ אז $A\times B=A\times A=B\times A$.
$\Rightarrow$ נניח ש $A\times B=B\times A$, אם $B=\phi$ או $A=\phi$ אז סיימנו. אחרת, יהיו $a\in A$, $b\in B$, מתקיים $(a,b)\in A\times B=B\times A$ לכן $a\in B$ ו $b\in A$.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 4

תהיינה A ו- B קבוצות, B קבוצה אינסופית. נסמן $a=|A|$, $b=|B|$ ונניח ש $1<a\le b$.

א. (4) הוכיחו שקימת תת-קבוצה C של B כך ש $|A|=|C|$.

ב. (4) מצאו את $|A\cup B|$. נמקו.

ג. (4) נגדיר $D=\{f \mid f:B\to A\}$, הוכיחו ש $|D|=2^b$.

ד. (4) הוכיחו שעוצמת הקבוצה $\bigcup\limits_{x\in A}(B\times\{x\})$ היא b.

ה. (4) מצאו את עוצמת הקבוצה הבאה $P(B\times A)\times B\times N$. (N היא קבוצת המספרים הטבעיים). נמקו.

פתרון: א. $|A|\le|B|$ לכן קיימת פונקציה חח״ע $f:A\to B$, לכן $f:A\to f[A]$ היא חח״ע ועל. כמובן ש $f[A]\subseteq B$ ו $|A|=|f[A]|$.

ב. נגדיר פונ׳ חח״ע $f:B\to A\cup B$ ע״י $f(b)=b$ לכן $b=|B|\le|A\cup B|$. מצד שני $|A\cup B|\le|B\times\{0\}\cup B\times\{1\}|=b+b=b$ (השתמשנו בעובדה ש $|A|\le|B|$ וכן שלכל עוצמה אינסופית b מתקיים $b+b=b$). לכן לפי ק.ש.ב. מתקיים $|A\cup B|=b$.

ג. $D=A^B$ לכן $|D|=a^b$ ולפי טענה שהוכחנו (כאשר $1<a\le b$ ו b עוצמה אינסופית) מתקיים $a^b=2^b$.

ד. $b=|B|\le|\bigcup\limits_{x\in A}(B\times\{x\})|$ ע״י בחירת $x_0\in A$ (קיים כזה) והגדרת פונ׳ חח״ע $f:B\to\bigcup\limits_{x\in A}(B\times\{x\})$ ע״י $f(b)=(b,x_0)$. מצד שני לפי משפט שהוכחנו $|\bigcup\limits_{x\in A}(B\times\{x\})|\le|A|\cdot|B|=a\cdot b=b$ (השתמשנו בעובדה $|B\times\{x\}|=|B|\cdot 1=|B|$ ושלכל עוצמה אינסופית b, $a\cdot b=\max\{a,b\}$). לכן לפי ק.ש.ב. $|\bigcup\limits_{x\in A}(B\times\{x\})|=b$.

פתרון זריז יותר: $\bigcup\limits_{x\in A}(B\times\{x\})=A\times B$ (למה?) ולכן

$|\bigcup\limits_{x\in A}(B\times\{x\})|=|A|\cdot|B|=a\cdot b=b$.

ה. $|P(B\times A)\times B\times N|=|P(B\times A)|\cdot|B|\cdot|N|=$

$$=2^{ab}\cdot b\cdot\aleph_0 \quad 2^b\cdot b\cdot\aleph_0=\max\{2^b,b,\aleph_0\}=2^b$$

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 5

א. (6) הוכח באופן **קומבינטורי** את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

ב. נתונות הקבוצות A,B והפונקציות הבאות: $f:A\to Z, g:B\to Z$, (Z היא קבוצת המספרים השלמים.)

נגדיר שתי פונקציות חדשות: $h_1 : A\times B\to Z\times Z$ ע"י $h_1((a,b))=(f(a),g(b))$.

$h_2 : A\times B\to Z$ ע"י $h_2((a,b))= f(a)+g(b)$.

הוכח או הפרך:

1. (5) אם f,g חד חד ערכיות אז h_1 חד חד ערכית.
2. (5) אם f,g על אז h_2 על.
3. (4) (5) אם f,g חד חד ערכיות אז h_2 חד חד ערכית.

פתרון:

א. שני האגפים סופרים את מספר האפשרויות לבחור ועד כיתה מתוך n תלמידי הכיתה ואחד מהם שישמש כיושב ראש הועד.

באגף ימין בוחרים תחילה את היו"ר מתוך n התלמידים ומשלימים את הועד ע"י בחירה של קבוצת תלמידים מתוך $n-1$ שנשארו.

באגף שמאל, לכל $k\in\{0,1,...,n\}$ בוחרים ועד בן k חברים ב $\binom{n}{k}$ אפשרויות

ובוחרים נשיא מתוכם ב k אפשרויות.

ב. 1. נניח f,g חד חד ערכיות. נניח ש $h_1(a_1,b_1)=h_1(a_2,b_2)$. אז $(f(a_1),g(b_1))=(f(a_2),g(b_2))$ ולכן $f(a_1)=f(a_2), g(b_1)=g(b_2)$

כיון ש f,g חד חד ערכיות הרי $a_1=a_2, b_1=b_2$ ומכאן ש $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$.

2. יהי $y\in Z$. צריך להראות שיש $(a,b)\in A\times B$ כך ש $h_2(a,b)= f(a)+g(b)=z$.
ובכן, כיון f,g על הרי יש $a\in A$ כך ש $f(a)=0$ ויש $b\in A$ כך ש $g(a)=y$ ולכן $h_2(a,b)= f(a)+g(b)=0+y=y$.

3. לא בהכרח. למשל, אם $A=B=Z$ ו f,g הן פונקצית הזהות. שתיהן ודאי חד חד ערכיות אבל $h_2(2,5)= f(2)+g(5)=2+5=7=5+2= f(5)+g(2)=h_2(5,2)$ למרות ש $(2,5)\neq(5,2)$.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 6

א. (10) תהי A קבוצה לא ריקה ותהי $\{R_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה של יחסי שקילות על A. הוכיחו ש
$R=\bigcap_{\alpha\in I} R_\alpha$ הוא יחס שקילות על A.

ב. (10) לכל n טבעי נסמן $R_n=\{(x,y)\in Z\times Z \mid (x-y)$ מחלק את $n\}$. (Z היא קבוצת המספרים השלמים.)

רשמו את R_1 בצורה מפורשת (2).

מצאו עוצמת הקבוצה Z/R_1 (2).

רשמו את $R=\bigcap_{n\in N} R_n$ בצורה מפורשת (3).

מצאו עוצמת הקבוצה Z/R (3). **יש לנמק כל תשובה!**

פתרון:

א. יש להראות: רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות.

1. רפלקסיביות: נניח ש $x\in A$. צריך להוכיח: $(x,x)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$. ואכן, כיון שלכל $\alpha\in I$, R_α הוא יחס שקילות, ודאי ש R_α רפלקסיבי ולכן $(x,x)\in R_\alpha$ לכל $\alpha\in I$ ומכאן ש $(x,x)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$.

2. סימטריות: נניח ש $(x,y)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$. יש להוכיח ש $(y,x)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$. ואכן, כיון ש $(x,y)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$ הרי $(x,y)\in R_\alpha$ לכל $\alpha\in I$ אבל R_α סימטרי (כיחס שקילות) ולכן $(y,x)\in R_\alpha$ לכל $\alpha\in I$ ומכאן ש $(y,x)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$.

3. טרנזיטיביות: נניח ש $(x,y)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$ וכן $(y,z)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$. צריך להוכיח כי $(x,z)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$.
ובכן, מכך ש $(x,y)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$ ו $(y,z)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$ נובע ש $(x,y),(y,z)\in R_\alpha$ לכל $\alpha\in I$.
אבל R_α יחס שקילות ($\alpha\in I$) ולכן טרנזיטיבי ומכאן ש $(x,z)\in R_\alpha$ לכל $\alpha\in I$. לכן גם $(x,z)\in\bigcap_{\alpha\in I}R_\alpha$

ב. $R_1=\{(x,y)\in Z\times Z : 1\mid x-y\}=Z\times Z$.

עבור $(x,y)\in R_1$ $x,y\in Z$ כאשר יש $k\in Z$ כך ש $1\cdot k=x-y$. לכל $x,y\in Z$ יש $k\in Z$ כזה, הלא הוא $k=x-y$. לכן כל שני איברים של Z הם שקולים לפי יחס זה. מכאן שיש רק

מחלקת שקילות אחת והיא הקבוצה Z עצמה. קבוצת המנה, כזכור, היא הקבוצה שאיבריה הם מחלקות השקילות. לכן כאן $\left| Z/R_1 \right| = 1$.

$$R = \bigcap_{n \in N} R_n = \{(x, y) \in Z \times Z : \forall n \in N, (x, y) \in R_n\} =$$
$$\{(x, y) \in Z \times Z : \forall n \in N, n \mid x - y\} = .$$
$$\{(x, x) \in Z \times Z : x \in Z\}$$

(שימו לב לכך שהמספר היחיד המתחלק בכל מספר טבעי הוא 0) .

לכן, במקרה זה, כל איבר של Z מהווה מחלקת שקילות עבור עצמו, כלומר קיימת פונקציה חח״ע ועל בין Z/R ל Z וכזכור $|Z| = \aleph_0$.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 7

תהי פונקציה $f:A\to B$ ויהיו $C\subseteq A, D\subseteq B$. הזכר בשתי ההגדרות הבאות שנתנו בשעור:

$$f[C]=\{f(c)\,|\,c\in C\}$$
$$f^{-1}[D]=\{x\in A\,|\,f(x)\in D\}$$

א.(6) הוכח ש: $C\subseteq f^{-1}[f[C]]$.

ב. (7) הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $C=f^{-1}[f[C]]$.

ג. (7) תנו דוגמא בה ההכלה בסעיף א היא הכלה ממש.

פתרון:

א. יהי $x\in C$. יש להראות כי $x\in f^{-1}[f[C]]$. עפ"י הגדרת קבוצת המקור, מספיק להוכיח ש $f(x)\in f[C]$ אבל זה נכון ממש לפי הגדרת הקבוצה $f[C]$ כיון ש $x\in C$.

ב. נניח ש f חד חד ערכית. את ההכלה $C\subseteq f^{-1}[f[C]]$ (שנכונה תמיד, בלי תלות בהיות f חד חד ערכית) כבר הוכחנו בסעיף הקודם. נוכיח אם כן, $f^{-1}[f[C]]\subseteq C$.

ובכן, יהי $x\in f^{-1}[f[C]]$. עפ"י הגדרת קבוצת המקור, מתקיים $f(x)\in f[C]$. נסמן $y=f(x)$. לפי הגדרת $f[C]$, קיים $t\in C$ כך ש $f(t)=y=f(x)$. היות ש f חד חד ערכית, הרי $t=x$. אבל $t\in C$ ולכן $x\in C$ וגמרנו.

ג. נגדיר $f:\{1,2,3\}\to\{a,b,c\}$ ע"י $\begin{matrix} f(1)=f(2)=a \\ f(3)=b \end{matrix}$. נקח $C=\{1\}$. אז $f[C]=\{f(1)\}=a$ ולכן $f^{-1}[f[C]]=f^{-1}[\{a\}]=\{1,2\}\supset C$.

שימו לב: מי שהתייחס לקבוצת המקור $f^{-1}[C]$ כאל הפונקציה ההופכית קיבל ס"ה 0 נקודות על שאלה זו.