בוחן בחדוו"א 2

ענה על שלוש מתוך ארבע שאלות.

נמק תשובותיך.

משך הבוחן 120 דקות.

בהצלחה!!!

שאלה 1

חשב את האינטגרלים הלא מסוימים הבאים:

סעיף א

$$\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos^3 x dx$$

סעיף ב

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x-\sqrt{x+1}+1}dx$$

שאלה 2

סעיף א

חשב את אורך הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ בתחום $0 \le x \le 1$.

סעיף ב

רשום באמצעות נוסחת נסיגה פתרון ל $I_n = \int x^n e^{-x} dx$.

שאלה 3

סעיף א

חשב לאילו ערכי α האינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\alpha} dx$ מתכנס.

סעיף ב

הוכיחו את אי השוויון $\frac{1}{2}(e-1) \ge \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)}dx \ge \frac{4}{9}(e-1)$.

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a\ln x}{\sqrt{x}}$, $a>0$.

א. מצא:

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. השטח, החסום על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה x ועל ידי הישר העובר בנקודת הקיצון של הפונקציה ומאונך לציר ה x, מסתובב סביב ציר ה x. נפח גוף הסיבוב שמתקבל הוא $\frac{8\pi}{3}$.

מצא את הערך של a.

פתרון הבוחן

שאלה 1

סעיף א

$$\int \sqrt{\sin x}\cdot \cos^3 x dx$$

נציב $t=\sin x \Leftarrow dt=\cos x dx$

$$\int \sqrt{\sin x}\cdot \cos^3 x dx=\int \sqrt{\sin x}\cdot\left(1-\sin^2 x\right)\cdot \cos x dx=\int \sqrt{t}\cdot\left(1-t^2\right)dt=\int\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{5}{2}}\right)dt=\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2t^{\frac{7}{2}}}{7}+c$$

$$=\frac{2\sin^{\frac{3}{2}} x}{3}-\frac{2\sin^{\frac{7}{2}} x}{7}+c$$

סעיף ב

נציב $t=\sqrt{x+1} \Leftarrow dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x-\sqrt{x+1}+1}dx=\int \frac{2\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x+1-\sqrt{x+1}}dt=\int \frac{2\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\sqrt{x+1}-1}dt=\int \frac{2t+4}{t-1}dt=$$

$$\int \frac{2t-2}{t-1}dt+6\int \frac{1}{t-1}dt=\int 2dt+6\int\frac{1}{t-1}dt=2t+6\ln|t-1|+c=2\sqrt{x+1}+6\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|$$

שאלה 2

סעיף א

אורך עקום: $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \Rightarrow \left(f'(x)\right)^2=\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} \Rightarrow 1+\left(f'(x)\right)^2=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$$

סה"כ קיבלנו ש $1+\left(f'(x)\right)^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|$.

מכיוון ש $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ חיובי לכל x נקבל ש $\left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

$$\int_0^1\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}\approx 1.175$$

סעיף ב

$I_n=\int x^n e^{-x}dx$.

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u=x^n \qquad v=-e^{-x}$$

$$u'=nx^{n-1} \qquad v'=e^{-x}$$

$I_n=-x^n e^{-x}+n\int x^{n-1}e^{-x} \Rightarrow I_n=-x^n e^{-x}+nI_{n-1}$.

$$I_1=\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}$$

תשובה: $\begin{cases} I_1=-xe^{-x}-e^{-x} \\ I_n=-x^n e^{-x}+nI_{n-1} \end{cases}$

<u>שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

עבור $\alpha>0$ הפונקציה $f(x)=(\tan x)^{\alpha}$ לא חסומה בסביבת הנקודה $\frac{\pi}{2}$.

נבדוק האם $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\alpha}dx$ מתכנס.

הפונקציה $f(x)=(\tan x)^{\alpha}$ אי שלילית בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ולכן ניתן להשתמש במבחן השוואה הגבולי.

נסמן $g(x)=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}}$.

$$1=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{\alpha}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}}{(\cos x)^{\alpha}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(\sin x)^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}}{(\cos x)^{\alpha}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

הפונקציות $f(x),g(x)$ מתכנסות ומתבדרות ביחד.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}}dx$ מתכנס עבור $0<\alpha<1$ ומתבדר כאשר $1\le\alpha$.

עבור $\alpha<0$ הפונקציה $f(x)=(\tan x)^{\alpha}$ לא חסומה בסביבת הנקודות 0.

נבדוק האם $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\alpha}dx$ מתכנס.

הפונקציה $f(x)=(\tan x)^{\alpha}$ אי שלילית בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ולכן ניתן להשתמש במבחן השוואה הגבולי.

נסמן $g(x)=x^{\alpha}$.

$$1=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{(\sin x)}\right)^{-\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-\alpha}}{(\sin x)^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\sin x)^{\alpha}}{(\cos x)^{\alpha}x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

הפונקציות $f(x),g(x)$ מתכנסות ומתבדרות ביחד.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{\alpha}dx$ מתכנס עבור $-1<\alpha<0$ ומתבדר כאשר $-1\ge\alpha$.

נשים לב שעבור $\alpha=0$ האינטגרל מתכנס.

סה"כ קיבלנו שהאינטגרל מתכנס עבור $-1<\alpha<1$.

מתבדר עבור $\alpha\le -1 \vee 1\le\alpha$.

<u>סעיף ב</u>

הפונקציה $f(x)=(1+x)(2-x)=-x^2+x+2$ רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ ולכן מקבלת שם מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט.

נשים לב שהמקסימום המוחלט הוא $\frac{9}{4}$ והמינימום המוחלט הוא 2.

$$\frac{4}{9}(e-1)=\frac{4}{9}\int_0^1 e^x dx\le\int_0^1\frac{e^x}{(1+x)(2-x)}dx\le\frac{1}{2}\int_0^1 e^x dx=\frac{1}{2}(e-1)$$

<u>שאלה 4</u>

<u>סעיף א1</u>

פונקצית $\ln$ מקבלת ערכים חיוביים בלבד: תחום ההגדרה $0<x$. התחום מתאים גם לפונקצית שורש שמופיע במכנה.

<u>סעיף א2</u>

חיתוך עם ציר y: אין מכיוון שהפונקציה לא מוגדרת עבור $x=0$.

חיתוך עם ציר x: שבר מתאפס רק כאשר המונה מתאפס: $\ln x=0 \Leftarrow x=1$.

$(1,0)$.

<u>סעיף א3</u>

נגזור ונשווה לאפס:

$$f(x)=\frac{a\ln x}{\sqrt{x}} \Leftarrow f'(x)=\left(\frac{a}{x}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot a\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2a-a\ln x}{2x\sqrt{x}} \Leftarrow f'(x)=\left(\frac{a}{\sqrt{x}}-\frac{a\ln x}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{1}{x}$$

נשווה לאפס ונקבל את המשוואה $2a-a\ln x=0 \Leftarrow x=e^2$.

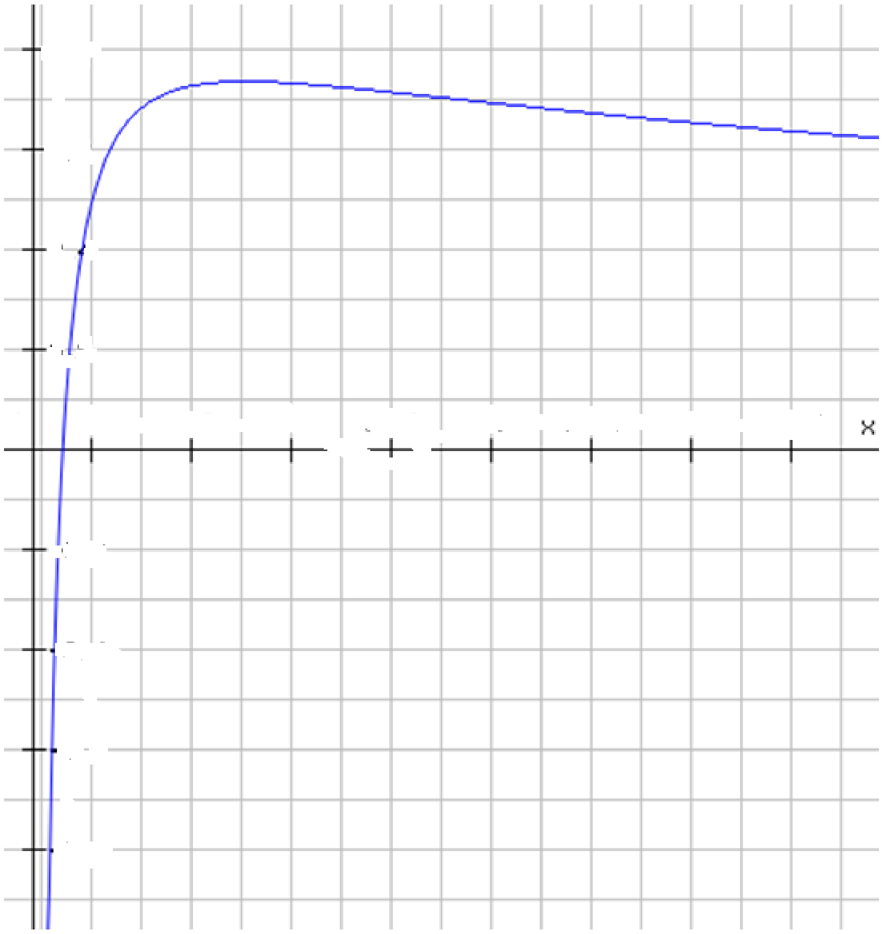
$$f'(x)=\frac{a(2-\ln x)}{2x\sqrt{x}}$$

x	0	$<x<$	e^2	$<x$
y		עולה		יורד
y'		חיובי		שלילי

$$f'(e)=\frac{+\cdot+}{+}=+;\ f'(e^3)=\frac{+\cdot-}{+}=-$$

תחומי ירידה: $e^2<x$. תחומי עלייה: $0<x<e^2$.

<u>סעיף ב</u>



סעיף ג

שיעור ה x של נקודת המינימום $x = e^2$.

יש לחשב $\pi \int_1^{e^2} \frac{a^2 \ln^2 x}{x} dx = \pi \int_1^{e^2} \left(\frac{a \ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$.

נחשב ע"י שיטת ההצבה $\int \frac{a^2 \ln^2 x}{x} dx$. נציב $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

$\frac{a^2 \ln^3 x}{3} = \frac{a^2 t^3}{3} = \int a^2 t^2 dt$.

$\pi \int_1^{e^2} \frac{a^2 \ln^2 x}{x} dx = \pi \left[\frac{a^2 \ln^3 x}{3} \right]_1^{e^2} = \pi \left(\frac{a^2 \ln^3 e^2}{3} - 0 \right) = \frac{8\pi a^2}{3}$.

נתון שהנפח הוא $\frac{8\pi}{3}$, ולכן $\frac{8\pi}{3} = \frac{8\pi a^2}{3} \Rightarrow a^2 = 1$. נתון ש $a > 0$ ולכן התשובה היא $a = 1$.