תרגיל בית 6 - טופולוגיה

3 במאי 2017

1. קבעו לגבי כל אחת מהפונצקיות הבאות אם היא פתוחה/סגורה/רציפה:

(א) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

פתרון :

- הפונקציה לא רציפה שכן אינה רציפה ב 0. ניתן להוכיח זאת למשל עפ"י היינה: $\frac{1}{n} \to 0$ אבל $f_1(\frac{1}{n}) \not\to 1 = f_1(0)$.
- הפונקציה אינה פתוחה כי למשל $(-1,1)$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_1((-1,1)) = [1,\infty)$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.
- הפונקציה אינה סגורה כי למשל $[0,\infty)$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_1([0,\infty)) = (0,\infty) = \{1\} \cup (0,\infty)$ שאינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

(ב) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

פתרון :

- הפונקציה לא רציפה. ניתן להוכיח זאת למשל ע"י כך ש $\{1\}$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.
- הפונקציה אינה פתוחה כי למשל $\mathbb{R}$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2(\mathbb{R}) = \{0,1\}$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.
- הפונקציה סגורה כי לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ (ובפרט עבור A סגורה) מתקיים כי $f_2(A) \in \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ שכולם קבוצות סגורות ב $\mathbb{R}$.

(ג) $f_3 : X \to \mathbb{R}$ עבור $X = [2,3] \cup [4,5)$ המוגדרת ע"י

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & x \in [2,3] \\ x & x \in [4,5) \end{cases}$$

פתרון :

- הפונקציה רציפה. כן היא מוגדרת ע"י שתי הפונקציות הבאות:
  - $h(x):[2,3]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $h(x)=1$
  - $g(x):[4,5)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g(x)=x$

  שתי הפונקציות רציפות (h קבועה ו g ההכלה). בנוסף $\{[2,3],[4,5)\}$ כיסוי פתוח של X שהחיתוך בינהם ריק ולכן מתקיימים תנאי המשפט המבטיח רציפות של f_3.
- הפונקציה אינה פתוחה ואינה סגורה שכן $[4,5)$ סגורה ב X אבל $f([4,5))=[4,5)$ לא פתוחה ולא סגורה ב $\mathbb{R}$.

2. יהא X מ"ט. יהא $A\subseteq X$ תת מרחב ותהא $S\subseteq A$ תת קבוצה אזי: S סגורה ב A $\Longleftrightarrow$ קיימת $Q\subseteq X$ סגורה ב X כך ש $S=Q\cap A$

פתרון :

$(\Rightarrow)$נתון קיימת Qסגורה ב X כך ש $S=Q\cap A$ וצריך להוכיח כי S סגורה ב A.
נשים לב שמתקיים

$$A\setminus S=A\setminus(Q\cap A)=A\cap(X\setminus Q)$$

ובנוסף $X\setminus Q$ הינה פתוחה ב X ולכן לפי הגדרת תת מרחב טופולוגי $A\cap(X\setminus Q)$ פתוחה ב A. מכאן ש $A\backslash S$ פתוחה ב A ומכאן ש S סגורה ב A.

$(\Leftarrow)$נתון S סגורה ב A נבנה Q סגורה ב X המקיימת $S=Q\cap A$. היות ו S סגורה ב A נקבל $A\backslash S$ פתוחה ב A ולכן קיימת Y פתוחה ב X המקיימת $A\backslash S=Y\cap A$ ובנוסף $Q=X\backslash Y$ סגורה ב X. נראה כי $S=A\cap Q$:

$$S=A\backslash(A\backslash S)=A\backslash(Y\cap A)=A\cap(Y\cap A)^c=A\cap(Y^c\cup A^c)=A\cap Y^c=A\cap Q$$

כאשר המשלים $*^c$ הוא ביחס ל X.

3. הוכיחו

(א) כל פונקציה ממ"ט דיסקרטי לכל מ"ט אחר היא פונקציה רציפה.

פתרון :

תהא $f:(X,\tau_{disc})\to(Y,\tau)$ פונקציה ממ"ט דיסקרטי לכל מ"ט אחר. במ"ט דיסקרטי כל קבוצה היא פתוחה ולכן U פתוחה ב Y מתקיים כי $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה שזה אומר ש f רציפה על פי הגדרה.

(ב) כל פונקציה ממ"ט כל שהוא למ"ט הטיריאלי היא פונקציה רציפה.

פתרון :

תהא $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_{trivial})$ פונקציה מ"ט כל שהוא למ"ט הטיריאלי. לפי הגדרה טופולוגיה טריואלית הקבוצות הפתוחות היחידות הן $\emptyset,Y$. כיוון ש $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset, f^{-1}(Y)=X$ פתוחות ב X נקבל כי f רציפה.

(ג) תהא $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה ונניח כי $\tau_1\subseteq\tau_1',\tau_2'\subseteq\tau_2$. הוכיחו כי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2'),f:(X,\tau_1')\to(Y,\tau_2)$ רציפות.

פתרון :

$f:(X,\tau_1')\to(Y,\tau_2)$: לכל קבוצה פתוחה $U\in\tau_2$ מתקיים כי $f^{-1}(U)\in\tau_1\subseteq\tau_1'$ פתוחה כי f רציפה.

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2')$, : לכל קבוצה פתוחה $U\in\tau_2'\subseteq\tau_2$ מתקיים כי $f^{-1}(U)\in\tau_1$ פתוחה כי f רציפה.

4. תהא $f : X \to Y$ פונקציה בין שתי מ"ט. נסתכל על $f(X)$ כתמ"ט של Y.

(א) הוכיחו שאם f פתוחה [או סגורה] כפונקציה מ X ל Y אזי היא פתוחה [או סגורה] כפונקציה מ X ל $f(X)$.

פתרון :

נניח ש $f : X \to Y$ פתוחה. תהא $U \subseteq X$ פתוחה אזי $f(X)$ פתוחה ב Y. כיוון ש $f(U) \subseteq f(X)$ מתקיים כי $f(U) = f(U) \cap f(X)$ ולכן פתוחה ב $f(X)$.

עבור $f : X \to Y$ סגורה הפתרון דומה ע"י עזרה מתרגילים קודמים.

(ב) הראו ע"י דוגמא נגדית שמהעובדה כי f פתוחה [או סגורה]כפונקציה מ X ל $f(X)$ לא נובע כי f פתוחה [או סגורה] כפונקציה מ X ל Y.

פתרון :

נבחר $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{R}$ ו f פונצקיה ההכלה. אזי $f(X) = \mathbb{Z}$ והפונקציה

$$f : X \to f(X)$$

היא הזהות ולכן פתוחה. לעומת זאת

$$f : X \to Y$$

אינה פתוחה כי X פתוחה ב X אבל $f(X) = \mathbb{Z}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

5. יהיו $m, c \in \mathbb{R}$ שני מספרים. נגדיר תת מרחב של $\mathbb{R}^2$ כך

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y = mx + c\right\}.$$

הוכיחו כי X הומיאומורפי ל $\mathbb{R}$.

פתרון :

תהי $p_1 : X \to \mathbb{R}$ פונקצית ההטלה על הרכיב הראשון. היא הפיכה שכן $f : X \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = (x, mx + c)$ היא ההופכית שלה (בדקו). בנוסף p_1 רציפה שכן היא מתקבלת מצמצום הטוחח ל X של פונקצית ההטלה הרציפה. גם הפונקציה f רציפה כי היא רציפה בכל רכיב.

6. יהא $(X, \| * \|)$ מרחב נורמי $a \in X, c \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי הפונקציות הבאות רציפות:

(א) העתקת הנורמה: $f : (X, \| * \|) \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = \|x\|$ כאשר שני המרחבים הם מרחבים מטריים.

פתרון :

נוכיח תחילה שלכל $x, y \in X$ מתקיים כי $\|x - y\| \le |\|x\| - \|y\||$. אכן לפי אי שיוון המשולש מתקיים כי

$$\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\|$$

ובהעברת אגף $\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$. באופן דומה גם $\|y\| - \|x\| \le \|x - y\|$ ולכן י $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$. כעת נראה שהפונקציה רציפה בנקודה x: יהא $0 < \epsilon$ ונבחר $\delta = \epsilon$ ואז יתקיים שאם $\|x - y\| < \delta$ מתקיים

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| \le \epsilon = \delta$$

וסיימנו.

(ב) הזזה: $g:(X,\|*\|)\to(X,\|*\|)$ המוגדרת ע"י $g(x)=x+a$
פתרון :

באופן דומה לסעיף קודם נראה כי g רציפה בנקודה x: יהא $0<\epsilon$ ונבחר $\delta=\epsilon$ ואז יתקיים שאם $\|x-y\|<\delta$ מתקיים

$$\|g(x)-g(y)\|=\|\,(x+a)-(y+a)\,\|=\|x-y\|\le\|x-y\|\le\epsilon=\delta$$

וסיימנו.

(ג) כפל בסקלאר: $h:(X,\|*\|)\to(X,\|*\|)$ המוגדרת ע"י $h(x)=cx$
פתרון :

אם $c=0$ נקבל כי h העתקת האפס ולכן רציפה.

אם $c\neq 0$ נוכיח לפי הגדרה ש h רציפה בנקודה x: אכן יהא $0<\epsilon$ ונבחר $\delta=\frac{\epsilon}{|c|}$ ואז יתקיים שאם $\|x-y\|<\delta$ מתקיים

$$\|h(x)-h(y)\|=\|cx-cy\|=|c|\cdot\|x-y\|\le|c|\cdot\delta=\epsilon$$

(ד) הסיקו כי כל כדור פתוח $B(a,\epsilon)$ (עבור $a\in X$ ו $0<\epsilon$) הומיאומורפי לכדור $B(0,1)$
פתרון :)

נגדיר $f:B(a,\epsilon)\to B(0,1)$ ע"י $f(x)=\frac{1}{\epsilon}(x-a)$ (בדקו שאכן $Imf\subseteq B(0,1)$) והיא תהיה רציפה לפי סעיפים קודמים (הרכבה של הזזה ב $-a$ והכפלה ב $\frac{1}{\epsilon}$). ההופכית שלה תהיה $f^{-1}:B(0,1)\to B(a,\epsilon)$ המוגדרת $f^{-1}(y)=\epsilon y+a$ וגם היא רציפה לפי סעיפים קודמים (גם היא הזזה וכפל). ולכן שני הכדורים הומיאומורפים.