גיאומטריה אוקלידית – פתרון תרגיל 1, זהבית צבי

הוכיחו את המשפט הבא:

משפט B.1 לכל שתי נקודות שונות A ו- B: **(i)** $AB = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$
(ii) $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$

הוכחה

הוכחנו את **(i)** בכיתה.

הוכחה של **(ii)**

כיוון $\Leftarrow$:
לא הגדרנו ישר כי זה ביטוי בלתי מוגדר. סעיף זה מדבר על הישר כאוסף כל הנקודות שעליו. כלומר באמצעות אקסיומות הסדר אנחנו יכולים לתאר את אוסף כל הנקודות באופן הבא:
הנקודות A, B וכל הנקודות C: $\left\{C \middle| A*C*B\,, C*A*B\,, A*B*C\right\}$.

ולכן לפי ההגדרה של קרן, שהיא חלק מהישר, $\overrightarrow{AB} \subseteq \overleftrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{BA} \subseteq \overleftrightarrow{AB}$, לכן מקבלים מיד כי $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subseteq \overleftrightarrow{AB}$.

כיוון $\Rightarrow$: ניקח איבר $C \in \overleftrightarrow{AB}$. אם $C = A$ או $C = B$, סימנו, מכיוון שלפי הגדרה, קרן מכילה את נקודת ההתחלה שלה.

$$\overrightarrow{AB} = AB \cup \left\{C \middle| A*B*C\right\}$$

נניח כי $C \neq A\,, C \neq B$. לפי אקסיומה $B-3$, מתקיים רק אחד מהיחסים הבאים:
$A*C*B,\ A*B*C$ או $C*A*B$.

אם $A*C*B$, אז לפי הגדרת הקרן $C \in \overrightarrow{AB}$ לכן $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ (מספיק אחד מהם כי זה איחוד)

אם $A*B*C$, אז לפי הגדרת הקרן $C \in \overrightarrow{AB}$, לכן $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

אם $C*A*B$, אז לפי הגדרת הקרן $C \in \overrightarrow{BA}$, לכן $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

בכל המקרים מקבלים כי $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ והוכחנו $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \supseteq \overleftrightarrow{AB}$.

בסה"כ הוכחנו את השוויון הדרוש $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

תרגיל 2

נתונות נקודות A, B, C שאינן קולינאריות. הוכיחו כי $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC} = \left\{B\right\}$.

הוכחה

לפי הנתון, הנקודות הנתונות אינן על ישר אחד, לכן הן שונות והקרנים בשאלה מוגדרות היטב.
נוכיח שתי הכלות:

כיוון ראשון: $\Leftarrow$ עלינו להוכיח כי בנקודה B נמצאת בחיתוך $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC}$.
לפי ההגדרה, ניתן לכתוב את הישר $\overleftrightarrow{AB}$ כך:

$$\overleftrightarrow{AB} = AB \cup \left\{D' \middle| D'*A*B\right\} \cup \left\{D \middle| A*B*D\right\}$$

לכן הנקודה B נמצאת על הישר $\overleftrightarrow{AB}$ כי היא על קטע.
באותו אופן:

$$\overleftrightarrow{BC} = BC \cup \left\{E' \middle| E'*B*C\right\} \cup \left\{E \middle| B*C*E\right\}$$

לכן הנקודה B נמצאת על הישר $\overleftrightarrow{BC}$.

כיוון שני $\Rightarrow$ עלינו להראות כי $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC} \subseteq \{B\}$.

ניקח $X \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC}$, אז $X \in \overleftrightarrow{AB}$ וגם $X \in \overleftrightarrow{BC}$.

מכיוון ש-$X \in \overleftrightarrow{AB}$, קים איזשהו ישר ℓ כך שהנקודות A, B, X הן על ℓ.

ומכיוון ש-$X \in \overleftrightarrow{BC}$, קים איזשהו ישר m כך שהנקודות B, C, X הן על m.

נניח בשלילה ש-$X \neq B$ אז אלה שתי נקודות שונות הנמצאות שתיהן על הישרים ℓ ו-m בו זמנית, לכן לפי משפט $I.1$ נקבל $\ell = m$. זו סתירה לכך שהנקודות A, B, C אינן קוליניאריות.

בסה"כ $X = B$, כלומר $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC} \subseteq \{B\}$.

<u>תרגיל 3</u>

נתונות נק' P, Q כך ש P על ℓ ו Q לא על ℓ. הוכיחו כי הקרן $\overrightarrow{PQ}$ **<u>הפתוחה</u>**, כלומר הקרן בלי הנקודה P, אינה חותכת את הישר ℓ.

<u>הוכחה</u>

נתון ישר ℓ ונקודה P על ℓ ו Q לא על ℓ.

לפי אקסיומה $I-1$ קים ישר אחד ויחיד בין P ו-Q, $\overrightarrow{PQ}$

כעת, הקרן $\overrightarrow{PQ}$ לפי ההגדרה:

$$\overrightarrow{PQ} = PQ \cup \{C | P*Q*C\}$$

ולכן הקרן ללא הנקודה P (קרן פתוחה):

$$\{Q\} \cup \{C | P*C*Q\} \cup \{D | P*Q*D\}$$

מכאן נובע כי הקרן הפתוחה לא מכילה נקודות על ℓ כי P לא נמצאת שם.

P נקודת החיתוך היחידה בין שני הישרים ℓ ל $\overrightarrow{PQ}$ (אין עוד נקודות לפי משפט $I.1$).

$\overrightarrow{PQ} \subseteq \overleftrightarrow{PQ}$ (הוכחנו בתרגול 1) ואם מורידים את P אז אין נקודות חיתוך של הקרן הפתוחה עם הישר ℓ, כלומר אינה חותכת את הישר.

<u>תרגיל 4</u>

נתונים הישרים ℓ, m. ונתונה נק' כך ש-$\ell \cap m = \{O\}$ (O נק' החיתוך היחידה ביניהם). הוכיחו כי קימות נקודות P, Q על ℓ, שהן בצדדים שונים של הישר m.

<u>הוכחה</u>

לפי אקסיומה $I-2$, יש נקודה חוץ מ O שנמצאת על ℓ. נקרא לה P.
לפי אקסיומה $B-2$ יש שתי נקודות שונות P ו-O אז קימת נקודה Q על הישר ℓ כך ש-$P*O*Q$. (רוצים בכוונה נקודה אחרי O). לפי הגדרה של צד, הקטע PQ מכיל נקודה על m שהיא O, כי יש את היחס $P*O*Q$ ולכן P ו-Q בצדדים שונים של m.

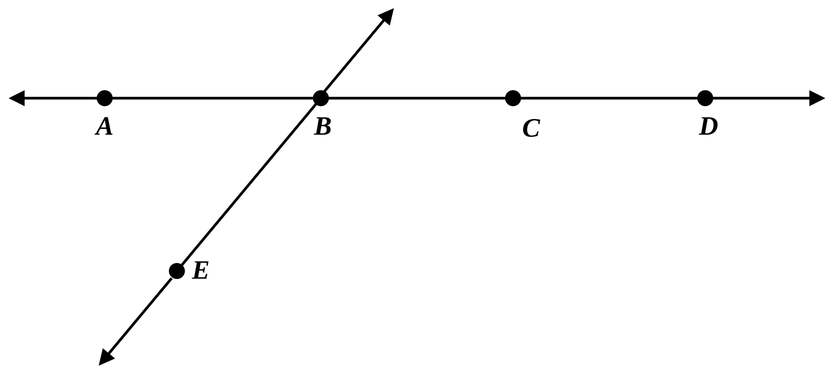
<u>תרגיל 5</u>

הוכיחו את המשפט הבא:
<u>משפט B.3:</u> אם נתונים $A*B*C$ וְ $A*C*D$, אז $B*C*D$ וְ $A*B*D$.

<u>הוכחה</u>
הוכחנו את $B*C*D$ בכיתה.
<u>$A*B*D$:</u>

(1) A,B,C,D נקודות שונות קולינאריות- נמצאות על ישר אחד.

(2) קימת נקודה E לא על הישר $\overleftrightarrow{ABCD}$ לפי משפט I-2.



(3) נתבונן בישר $\overleftrightarrow{EB}$ (הוא קים לפי אקסיומה I-1). מפני ש $\overleftrightarrow{AD}$ נפגש עם $\overleftrightarrow{EB}$ בנקודה B, אז הקטע AD מכיל נקודה (B) של הישר $\overleftrightarrow{EB}$, לכן לפי הגדרת הצד הנקודות A וְ D בשני צדדים שונים של ישר $\overleftrightarrow{EB}$.

(4) לפי ההנחה נתונים $A*B*C$ וְ $A*C*D$ אנחנו טוענים שהנקודות C וְ D באותו צד של ישר $\overleftrightarrow{EB}$. נניח בשלילה שהם בשני צדדים שונים של $\overleftrightarrow{EB}$.

(5) אז $\overleftrightarrow{EB}$ נפגש עם $\overline{CD}$ בנקודה בין C וְ D (הגדרה של צדדים שונים).

(6) הנקודה הזו חיבת להיות B לפי משפט I.1 היא הנקודה המשותפת היחידה בין שני ישרים שונים (כי הנקודה E לא נמצאת עליו ולכן שונים ולפי נתון 3) כלומר מתקים $C*B*D$

(7) לכן מתקים $A*C*B$ (כי B בין C ל D) וזה בסתירה לכך שמתקים $A*B*C$, שסותר אקסיומה **B-3** שצריכה להתקים רק אחת מהאפשרויות.

ניתן לסתור גם לפי ההוכחה שאנו יודעים כי מתקים $B*C*D$ הוכחנו בכיתה ואז זה בסתירה ל 5 ולאקסיומה **B-3**.

(8) לפיכך, C וְ D באותו צד של $\overleftrightarrow{EB}$

(9) לפיכך, $B \in \overleftrightarrow{EB} \cap \overleftrightarrow{AD}$ אכן הנקודה המשותפת היחידה ולפי הנתונים $A*B*C$ ו $A*C*D$ מקבלים גם $A*B*D$.