טכניקות אלגבריות חשובות:

בהוראת המתמטיקה חיוני להראות דרכים מגוונות ככל הניתן לפתרון בעיות שונות. התלמידים חייבים לפתח תפיסה גמישה ורב-תחומית בפתרון בעיות. לצורך זה, עלינו לספק בהוראתנו "ארגז כלים" משוכלל, מגוון וגמיש. "ארגז כלים" זה ישמש את התלמידים בפתרון בעיות. הנושא יכול להילמד מכיתה ח' ועד י'.

1. חלוקה לשברים חלקיים

פעולת החלוקה לשברים חלקיים תורמת רבות לפתרון בעיות במתמטיקה.
תוך כדי הסבר קצר ודוגמאות, נראה מספר יישומים מעניינים.

אם המכנה של שבר מתפרק לגורמים, ניתן לבדוק חלוקה לשברים חלקיים.
בכל חלוקה שכזאת, הפולינום במונה יהיה בחזקה אחת נמוכה יותר מהפולינום שבמכנה.

דוגמא ראשונה:

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4}=\frac{5x-10}{(x-4)(x+1)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)}=$$

$$=\frac{Ax+A+Bx-4B}{(x-4)(x+1)}=\frac{(A+B)x+A-4B}{(x-4)(x+1)}=\frac{(A+B)x+A-4B}{x^2-3x-4}$$

מכאן, על-ידי השוואת המונים נקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} A+B=5 \\ A-4B=-10 \end{cases} \Rightarrow A=2\ ,\ B=3$$

ומכאן שהפרוק הוא:
$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4}=\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x+1}$$

ברור כי כל אחד מהשברים שהתקבלו פשוט בהרבה מהשבר הנתון.
בנוסף, נשים לב כי ניתן ליישם שיטה זו לפתרון אינטגרלים שעד כה לא יכולנו לפתור.

$$\int\frac{5x-10}{x^2-3x-4}dx=\int\left(\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x+1}\right)dx=2\ln|x-4|+3\ln|x+1|+c$$

דוגמא שנייה:

$$\frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}=\frac{x^2+x-2}{(x^2+1)(3x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{3x-1}=\frac{(Ax+B)(3x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(3x-1)}=$$

$$=\frac{3Ax^2-Ax+3Bx-B+Cx^2+C}{(x^2+1)(3x-1)}=\frac{(3A+C)x^2+(3B-A)x+C-B}{3x^3-x^2+3x-1}$$

מכאן, על-ידי השוואת המונים, נקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} 3A+C=1 \\ 3B-A=1 \\ C-B=-2 \end{cases} \Rightarrow \quad A=\frac{4}{5} \quad , \quad B=\frac{3}{5} \quad , \quad C=-\frac{7}{5}$$

ומכאן שהפרוק הוא:

$$\frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}=\frac{\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}}{x^2+1}-\frac{\frac{7}{5}}{3x-1}=\frac{4x+3}{5(x^2+1)}-\frac{7}{5(3x-1)}$$

דוגמא אחרונה:

$$\frac{5}{(n-1)(n+1)}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n+1}=\frac{An+A+Bn-B}{(n-1)(n+1)}=\frac{(A+B)n+A-B}{(n-1)(n+1)}$$

מכאן, על-ידי השוואת המונים נקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=5 \end{cases} \Rightarrow \quad A=2\frac{1}{2} \quad , \quad B=-2\frac{1}{2}$$

ומכאן שהפרוק הוא:

$$\frac{5}{(n-1)(n+1)}=\frac{2\frac{1}{2}}{n-1}-\frac{2\frac{1}{2}}{n+1}=\frac{5}{2(n-1)}-\frac{5}{2(n+1)}$$

נשים לב כי פרוק זה מאפשר לנו להוכיח סכום טורים ללא שימוש באינדוקציה מתמטית.
החלוקה לשברים חלקיים מובילה לטור טלסקופי.

כך למשל נוכיח את סכום הטור הבא לכל $n\geq 3$ טבעי אי-זוגי, ללא צורך באינדוקציה מתמטית:

$$\frac{5}{2\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 6}+\frac{5}{6\cdot 8}+\dots\dots\dots\dots+\frac{5}{(n-1)(n+1)}=$$

$$=\frac{5}{2\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 4}+\frac{5}{2\cdot 4}-\frac{5}{2\cdot 6}+\frac{5}{2\cdot 6}-\frac{5}{2\cdot 8}+\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{5}{2(n-1)}-\frac{5}{2(n+1)}=$$

$$=\frac{5}{2\cdot 2}-\frac{5}{2(n+1)}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{n+1-2}{2(n+1)}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{n-1}{2(n+1)}=\frac{5(n-1)}{4(n+1)}$$

דף עבודה בנושא זה:

א. פרקו לשברים חלקיים את השברים הבאים:

1. $\frac{3x+1}{x^2+3x-10}=$

2. $\frac{5}{x^3-9x}=$

3. $\frac{1}{x^2+3x-4}=$

4. $\frac{11x+17}{2x^2+7x-4}=$

5. $\frac{1}{x^2+x-2}=$

6. $\frac{2x-3}{x^3-x^2}=$

7. $\frac{2x+4}{x^3-2x^2}=$

8. $\frac{5x-5}{3x^2-8x-3}=$

9. $\frac{1-5x^2}{x^3\left(x^2+1\right)}=$

10. $\frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x}=$

11. $\frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}=$

12. $\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=$

פתרון התרגילים:

$$1.\ \frac{2}{x+5}+\frac{1}{x-2} \qquad 2.\ \frac{-5}{9x}+\frac{5}{18(x+3)}+\frac{5}{18(x-3)}=\frac{5}{18}\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x}\right)$$

$$3.\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{5(x+4)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right) \qquad 4.\ \frac{3}{x+4}+\frac{5}{2x-1}$$

$$5.\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right) \qquad 6.\ \frac{x+3}{x^2}-\frac{1}{x-1}$$

$$7.\frac{2}{x-2}-\frac{2x+2}{x^2}=2\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x+1}{x^2}\right) \qquad 8.\frac{2}{x-3}-\frac{1}{3x+1}$$

$$9.\frac{1-6x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^2+1} \qquad 10.\frac{1}{x}-\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x+3} \qquad 11.\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2}$$

$$12.\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+1}$$

ב. יישומים מתקדמים לחלוקה לשברים חלקיים:

1. הוכיחו את הטענות הבאות לכל מספר טבעי n, ללא שימוש באינדוקציה מתמטית:

$$1.\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+..........+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

$$2.\frac{3}{3\cdot4}+\frac{3}{4\cdot5}+\frac{3}{5\cdot6}+...........+\frac{3}{(n+2)(n+3)}=\frac{n}{n+3}$$

2. חשבו את האינטגרלים הבאים: (מתאים לתלמידי 07 בלבד)

$$1.\ \int\frac{6x^3-15x^2+1}{x^4-3x^3+x-3}dx=$$

$$2.\int\frac{-14x^2+4x-5}{3x^3+12x^2+x+4}dx=$$

פתרון התרגילים:

.1 .1

$$a_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{b}{3n-2}+\frac{c}{3n+1}=\frac{3bn+b+3cn-2c}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$\begin{cases}3b+3c=0\\ b-2c=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}b=\frac{1}{3}\\ c=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n=\frac{1}{3(3n-2)}-\frac{1}{3(3n+1)}$$

ניישם את הפירוק בסכום המבוקש:

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\dots\dots\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$$

$$=\frac{1}{3\cdot1}-\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot7}+\frac{1}{3\cdot7}-\frac{1}{3\cdot10}+\dots\dots\dots+\frac{1}{3(3n-2)}-\frac{1}{3(3n+1)}=$$

$$=\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3(3n+1)}=\frac{3n+1-1}{3(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

הצלחנו להוכיח את נכונות הביטוי ללא שימוש באינדוקציה מתמטית.

. 2

$$a_n=\frac{3}{(n+2)(n+3)}=\frac{b}{n+2}+\frac{c}{n+3}=\frac{bn+3b+cn+2c}{(n+2)(n+3)}$$

$$\begin{cases}b+c=0\\ 3b+2c=3\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}b=3\\ c=-3\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n=\frac{3}{n+2}-\frac{3}{n+3}$$

נציב את הפירוק בסכום המבוקש:

$$\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 6}+\dots\dots\dots\dots+\frac{3}{(n+2)(n+3)}=$$

$$=\frac{3}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-\frac{3}{6}+\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{3}{n+2}-\frac{3}{n+3}=$$

$$=\frac{3}{3}-\frac{3}{n+3}=1-\frac{3}{n+3}=\frac{n+3-3}{n+3}=\frac{n}{n+3}$$

שוב, הצלחנו להוכיח את נכונות הביטוי ללא שימוש באינדוקציה מתמטית.

.2 .1

$$\int\frac{6x^3-15x^2+1}{x^4-3x^3+x-3}dx=\int\left(\frac{5x^2}{x^3+1}+\frac{1}{x-3}\right)dx=\otimes$$

בשבר הראשון נשתמש בסימון:

$$u=x^3+1$$

$$\frac{du}{dx}=3x^2\Rightarrow du=3x^2\,dx\quad\Rightarrow\frac{5}{3}du=5x^2\,dx$$

נחשב רק את חלק האינטגרל שנפתר בסימון:

$$\int\frac{5x^2}{x^3+1}dx=\int\frac{\frac{5}{3}}{u}du=\frac{5}{3}\int\frac{1}{u}du=\frac{5}{3}\ln|u|+c=1\frac{2}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$$

נפתור את האינטגרל:

$$\otimes=1\frac{2}{3}\ln\left|x^3+1\right|+\ln|x-3|+c$$

.2

$$\int\frac{-14x^2+4x-5}{3x^3+12x^2+x+4}dx=\int\left(\frac{x}{3x^2+1}-\frac{5}{x+4}\right)dx=\otimes$$

שוב, בשבר הראשון נשתמש בסימון:

$$u=3x^2+1$$

$$\frac{du}{dx}=6x\quad\Rightarrow\quad du=6x\,dx\;\Rightarrow\frac{1}{6}du=x\,dx$$

נחשב רק את חלק האינטגרל שנפתר בסימון:

$$\int\frac{x}{3x^2+1}dx=\int\frac{\frac{1}{6}}{u}du=\frac{1}{6}\ln|u|+c=\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+1\right|+c$$

נפתור את האינטגרל:

$$\otimes=\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+1\right|-5\ln|x+4|+c$$

2.טורים טלסקופיים:

בסעיף הקודם, תרגילים בהם הוכחנו נכונות טענות לכל n טבעי, ראינו כי החלוקה לשברים חלקיים הובילה לבנית טור טלסקופי. טור שכזה גורם לכינוס כל איברי הטווח ל- 0 ומותיר רק את איברי הקצה. טכניקת השימוש בטורים טלסקופיים היא יצירתית ומקצרת תהליכי הוכחה, כפי שראינו בדוגמאות שלעיל.
למרות שהנושא אינו מופיע רישמית בתכנית הלימודים, אנו משתמשים בטורים טלסקופיים במהלך ההוראה הרגיל, מבלי להגדיר את הטור הטלסקופי ומבלי להכלילו. בכך אנו "מפספסים" כלי חשוב ויצירתי.
נציג שתי דוגמאות לשימוש בטור טלסקופי בתכנית הלימודים.

<u>דוגמה ראשונה:</u>

בתהליך מציאת נוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית:

$$\oplus\begin{cases} a_2-a_1=d \\ a_3-a_2=d \\ a_4-a_3=d \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n-a_{n-1}=d \end{cases}$$

$$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

$$a_n-a_1=(n-1)d$$
$$\Downarrow$$
$$a_n=a_1+(n-1)d$$

<u>דוגמה שנייה:</u>

בתהליך מציאת נוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית:

$$\oplus\begin{cases} S_n = a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\dots\dots\dots+a_1q^{n-1} & /(-q) \\ -S_nq=-a_1q-a_1q^2-a_1q^3-a_1q^4-\dots\dots\dots-a_1q^n \end{cases}$$

$$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

$$S_n(1-q)=a_1(1-q^n)$$
$$\Downarrow$$
$$S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

ברור כי השימוש בטכניקת הטור הטלסקופי יעילה, ברורה ומקצרת תהליכים.
נראה שתי דוגמאות נוספות בהן שיטת הטור הטלסקופי מובילה לפתרון יצירתי ואלגנטי:

דוגמה ראשונה:

יש להוכיח את סכום הטור הבא לכל ההצבות הטבעיות של n:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+.........+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

בשלב ראשון, נבדוק את ערכי הטור ואת האיברים הראשונים כדי למצוא חוקיות שתעזור לנו לעבור לטור טלסקופי:

$$1!=1 \qquad 2!=2 \qquad 3!=6 \qquad 4!=24$$
$$1\cdot 1!=1 \qquad 2\cdot 2!=4 \qquad 3\cdot 3!=18$$

ניתן לראות בבירור את החוקיות, נכתוב אותה ונוכיח את נכונותה לכל המספרים הטבעיים:

$$(n+1)!-n!=n!(n+1-1)=n\cdot n!$$

נציג כעת את הסכום המבוקש כשאיבריו "מפורקים":

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! +.........+n\cdot n!=$$
$$=2!-1!+3!-2!+4!-3!+..........+(n+1)!-n!=$$
$$=-1!+(n+1)!=(n+1)!-1$$

ברור כי המעבר לטור טלסקופי קיצר את תהלים ההוכחה ונתן מענה יצירתי למשימה.

דוגמה שנייה:

יש להוכיח את סכום הטור הבא לכל ההצבות הטבעיות של n:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+..........+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

מהתבוננות בערכי העצרות שחישבנו בדוגמה הקודמת, קל למצוא חוקיות ולהוכיחה:

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{n}{(n+1)!}$$

נציג כעת את הסכום המבוקש כשאיבריו "מפורקים":

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots\dots\dots+\frac{n}{(n+1)!}=$$
$$=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots\dots\dots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=$$
$$=\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

שוב, ברור כי המעבר לטור טלסקופי קיצר את תהלים ההוכחה ונתן מענה יצירתי למשימה.

3. <u>שימוש מתקדם בנוסחאות הכפל המקוצר:</u>

שימוש מושכל בנוסחאות הכפל המקוצר יכולות להוביל לפתרונות קצרים ויצירתיים יותר מהפתרון האלגוריתמי הרגיל.
נראה כמה דוגמאות המאששות השקפה זו:

<u>דוגמה ראשונה:</u>

יש לחשב את סכום הטור הבא:

$$\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}+\frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{102}}+\frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}+\dots\dots+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}= \quad .$$

הכפלת המונה והמכנה בביטוי הצמוד למכנה תוביל לפתרון מהיר ויעיל:

$$\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}+\frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{102}}+\frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}+\dots\dots+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}=$$
$$=\frac{\sqrt{100}-\sqrt{101}}{-1}+\frac{\sqrt{101}-\sqrt{102}}{-1}+\frac{\sqrt{102}-\sqrt{103}}{-1}+\dots\dots\dots+\frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{-1}=$$
$$=\frac{10-11}{-1}=1$$

שימוש בנוסחת הפרש הריבועים עשתה את העבודה!

דוגמה שנייה:

חשבו את ערך הביטוי הבא:

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{33-20\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}=$$

שוב, שימוש בפירוק לגורמים יוביל לפתרון יעיל וקצר:

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{33-20\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(5-2\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(1-3\sqrt{2}\right)^2}=$$
$$=3-\sqrt{2}+5-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-1=7$$

דוגמה שלישית:

הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+.........+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\prec\sqrt{n+1}$$

שוב נכפול מונה ומכנה בצמודי המכנים לקבלת הפרש ריבועים:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+.........+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=$$
$$=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+.......+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-n-1}=$$
$$=-1\left(1-\sqrt{n+1}\right)=\sqrt{n+1}-1\prec\sqrt{n+1}$$

דוגמה רביעית:

פתרו את המשוואה הבאה:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

בתרגיל זה נזדקק לסימון לפני ביצוע פירוק לגורמים:
נסמן:

$$\sqrt{x-1}=a$$
$$\Downarrow$$
$$x-1=a^2$$
$$\Downarrow$$
$$x=a^2+1$$

המשוואה בסימון זה היא:

$$\sqrt{a^2+4-4a} + \sqrt{a^2+9-6a} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$|a-2| + |a-3| = 1$$

ומכאן, בשיטת האינטרוואלים הפתרון פשוט ($x=10$ $x=5$)

<u>דוגמה אחרונה:</u>

פתרו את המשוואה הבאה:

$$x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} = 40$$

דרך לפתרון: נבטל מכנים ונבצע השלמה לריבוע

$$x^2(9+x)^2 + 81x^2 - 40(9+x)^2 = 0$$

$$\left[9x - x(9+x)\right]^2 + 18x^2(9+x) - 40(9+x)^2 = 0$$

$$x^4 + 18x^2(9+x) - 40(9+x)^2 = 0$$

נבצע פירוק טרינום הסכום: 18

המכפלה: -40

הפירוק: +20, -2

$$\left[x^2+20(9+x)\right]\left[x^2-2(9+x)\right] = 0$$

ומכאן הפתרון פשוט.

דף עבודה בנושא זה:

1. הוכיחו ללא שימוש באינדוקציה מתימטית את נכונות הטענות הבאות,
לכל n טבעי:

1. $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+........+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$

2. $\frac{p}{p(p+1)}+\frac{p}{(p+1)(p+2)}+.........+\frac{p}{(p+n-1)(p+n)}=\frac{n}{p+n}$

3. $1^2-2^2+3^2-4^2+.......+(2n-1)^2-(2n)^2=-n(2n+1)$

השתמשו הנוסחת הפרש ריבועים.

4. $1^2-3^2+5^2-7^2+.......+(2n-3)^2-(2n-1)^2=-2n^2$

לכל המספרים הטבעיים הזוגיים.

2. חשבו את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}=$

ב. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{33-20\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}=$

ג. $\frac{9+3\sqrt{3}}{9+\sqrt{243}}=$

3. פשטו את הביטוי הבא:

$$\sqrt{\sqrt{2\sqrt{7+4\sqrt{3}}}-\sqrt{3}}=$$

פתרונות:

2.א. נשלים לריבוע.

$$\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}=\sqrt{25-10\sqrt{3}+3}+\sqrt{25+10\sqrt{3}+3}=$$
$$\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}=5-\sqrt{3}+5+\sqrt{3}=10$$

ב.שוב, נבצע השלמה לריבוע.

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{33-20\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(5-2\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(1-3\sqrt{2}\right)^2}=$$
$$=3-\sqrt{2}+5-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-1=7$$

ג. שוב, הכפלת מונה ומכנה בצמוד למכנה.

$$\frac{9+3\sqrt{3}}{9+\sqrt{243}}=\frac{\left(9+3\sqrt{3}\right)\left(9-\sqrt{243}\right)}{81-243}=\frac{3\left(3+\sqrt{3}\right)9\left(1-\sqrt{3}\right)}{-162}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{-6}=\frac{-2\sqrt{3}}{-6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. $$\sqrt{\sqrt{2\sqrt{7+4\sqrt{3}}}-\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}-\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}=$$

מעבר ראשון: $7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$

מעבר שני: $4+2\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}+3=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

$$=\sqrt{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}=1$$