אלגברה לינארית תרגול 6

28 ביולי 2020

1 מרחבים וקטוריים

1.1 חיתוך וסכום ת"מ

תרגילים:

1. עבור $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \begin{matrix} a - 3b - 5c = d \\ 4b + 8c - 2d = 2a \end{matrix} \right\}, W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \begin{matrix} a + b = c + d \\ -a + 2c = 0 \end{matrix} \right\}$. מצאו את $W_1 \cap W_2, W_1 +W_2$.

פתרון: נשים לב ש־ W_1, W_2 הם אוסף הפתרונות של המערכות ההומ':

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

כדי לדבר על הסכום, ננמצא תחילה את אוסף הפתרונות של כל מערכת. מתקיים שלאחר דירוג נקבל:

$$A_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

לכן נקבל:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s \\ t-s \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5a+2b \\ -2a-b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

ולכן נקבל:

$$W_1 + W_2 = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : a, b, t, s \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : a,t,s \in \mathbb{R} \right\}$$

לגבי החיתוך: פתרון של מערכת A_1 וגם מערכת A_2 הוא בעצם פתרון של המערכת:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

כדי למצוא פתרון, נדרג. כיון שכבר דירגנו כל מערכת בנפרד, נותר לדרג את תוצאת הדירוג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

2. מצאו סכום וחיתוך של:

$$W_1 = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} : \forall i < j A_{i,j} = 0\}, W_2 = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} : \forall i > j A_{i,j} = 0\}$$

פתרון: בחיתוך מתחייב שמחוץ לאלכסון אפסים, ואלכסון מה שרוצים, מה שנקרא - אוסף האלכסוניות.

$$W_1 \cap W_2 = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} : \forall i \neq j A_{i,j} = 0\}$$

לגבי הסכום - טענה $W_1 + W_2 = \mathbb{F}^{n \times n}$. תהי A מטריצה. ניקח:

$$(A_1)_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases} \in W_1$$

$$(A_2)_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases} \in W_2$$

ושימו לב ש־ $A = A_1 + A_2$.

3. מצאו חיתוך וסכום של:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_1 = \cdots = a_n \right\}, W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \right\}$$

פתרון: לגבי החיתוך: יהי $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$ לכן כל הרכיבים שווים וסכומם 0, ונקבל:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \underset{\forall i: a_i = a_1}{=} n a_1 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow \forall i : a_i = 0$$

ולכן $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

לגבי הסכום: טענה: $W_1 + W_2 = \mathbb{F}^n$. הוכחה: יהי $v \in \mathbb{F}^n$, צריך למצוא וקטור $b \in W_1, a \in W_2$ כך ש־ $a + b = v$.

נסמן $t = \sum_{i=1}^{n} v_i$, ניקח $\begin{pmatrix} \frac{t}{n} \\ \vdots \\ \frac{t}{n} \end{pmatrix} \in W_1$ $b =$ וקטור הממוצע של רכיבי v. לכן כדי לקבל $a + b = v$, נדרש: $\forall i : a_i = v_i - b_i = v_i - \frac{t}{n}$. נחשב שאכן $a \in W_2$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (v_i - \frac{t}{n}) = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right) - t = t - t = 0$$

מכאן נגיע להגדרת סכום ישר: בהינתן שני תתי מרחבים $W_1, W_2 \leq V$ נאמר שהסכום $W_1 + W_2$ הוא ישר, ונסמן $W_1 \oplus W_2$ אם $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. בדוגמאות לעיל נקבל:

- דוגמא 2: $W_1 + W_2 = \mathbb{F}^{n \times n}$ סכום לא ישר, כי החיתוך יותר מוקטור האפס.
- דוגמא 3: $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{F}^n$ סכום ישר.

1.2 אי־תלות ופרישה

תרגילים:

1. יהא V מ"ו, $S_1, S_2 \subseteq V$. הוכיחו: אם $S_1 \subseteq S_2$ אז $span(S_1) \subseteq span(S_2)$.
פתרון: יהא $v \in span(S_1)$. לכן v צירוף לינארי של וקטורים מ־S_1. כלומר, קיימים $v_1, \dots v_k \in S_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש־

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

עכשיו, מהעובדה $S_1 \subseteq S_2$ נקבל ש־ $v_1, \dots, v_k \in S_2$ ולכן v צ"ל של וקטורים מ־S_2, ואז $v \in span(S_2)$.
שים לב שעבור $S_1 = S_2 = \{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$. נקבל $span(S_1) = \mathbb{R}^2 \nsubseteq S_2$. אם S_2 היה ת"מ אז היה מתקיים $S_1 \subseteq span(S_1) \subseteq S_2$.

2. יהא V מ"ו, $v_1, v_2 \in V$. הוכיחו: v_1, v_2 ת"ל אמ"ם (v_1 כפולה של v_2 או v_2 כפולה של v_1).
פתרון: $\Leftarrow$: v_1, v_2 ת"ל אמ"ם קיים צ"ל לא טריוויאלי שנותן 0 אמ"ם $\exists(\alpha, \beta) \neq (0,0) : \alpha v_1 + \beta v_2 = 0$, ולכן בה"כ $\alpha \neq 0$ אז $v_1 = -\frac{\beta}{\alpha} v_2$.
$\Rightarrow$: בה"כ $v_1 = \alpha v_2$, אז $1 \cdot v_1 - \alpha v_2 = 0$, שהוא צ"ל לא טריוויאלי, ולכן v_1, v_2 ת"ל.

3. במרחב $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ נגדיר:

$$S = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(א) מצאו מטריצה $A \notin span(S)$, אם אפשר.

(ב) האם S בת"ל?

פתרון: א. תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. נראה מה התנאים לקבל $A = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$נקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = a \\ a_1 - a_3 = b \\ a_2 + a_3 = c \\ a_1 + 3a_2 = d \end{cases}$$

נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 & d-b-3c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-2c \end{array}\right)$$

ולכן $a - b - 2c = 0 \iff A \in span(S)$, ולכן המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin span(S)$.

ב. נשים לב ש־S בת"ל אמ"ם $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$. כלומר, S בת"ל אמ"ם אין פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומ' $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. דירגנו וראינו שאין משתנה חופשי, ולכן יש פתרון יחיד למערכת ההומ', הלא הוא הפתרון הטריוויאלי. לכן S בת"ל.

4. יהא V מ"ו, $A, B \subseteq V$ קב'. הוכיחו או הפריכו:

(א) $span(A)\Delta span(B) \subseteq span(A\Delta B)$

(ב) $span(A)\Delta span(B) \supseteq span(A\Delta B)$

פתרון: ב. צד ימין זה פרישה של משהו, לכן זה בוודאי ת"מ. מצד שמאל - האם זה ת"מ? בהכרח לא: $0 \notin span(A)\Delta span(B)$. ולכן כמובן $span(A)\Delta span(B) \not\supseteq span(A\Delta B)$. יותר חזק מהפרכה, הוכחנו שתמיד לא נכון.

א. ננסה להוכיח: $v \in span(A)\Delta span(B)$ לכן אם $v \in span(A) \setminus span(B)$ אז יש $v_1, \dots, v_n \in A$ כך ש־ $v = \sum \alpha_i v_i$, וכן שכל צ"ל של וקטורים מ־B לא נותן את v. האם בהכרח כל הוקטורים מ־ $A\Delta B$? לא בהכרח: חלקם אמנם כן, אבל לאו דווקא כולם.

הפרכה: $V = \mathbb{R}^2, A = \{e_1, e_2\}, B = \{e_1\}$. ואז $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in span(A)\Delta span(B) \setminus span(A\Delta B) = span(e_2)$.