מרצה: עודי חרוש    מייל: uziharush@gmail.com

# לינארית

**תרגיל:** יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ ו- $W_1=\{p(x)\in V \mid p'(1)=0\}$

$W_2=sp\{1+x,1+x^2\}$

תתי מרחבים של $V$ מצאו בסיסים ל- $W_1+W_2,\ W_1\cap W_2$

פתרון: $W_1+W_2$; ננסה את שני תתי מרחבים לכתוב

של $sp\{\ \}$

$$W_1=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_1+2a_2=0\}=$$

$$=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid (0\ 1\ 2 \mid 0)\}=$$

תרגום של וקטור פתי
של אילוץ לינארי

$$=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2 \;\middle|\; \begin{matrix} a_0=s \\ a_2=t \\ a_1=-2t \end{matrix}\right\}=\{s+(-2t)x+t\cdot x^2 \mid s,t\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\{s\cdot \underline{1}+t(\underline{-2x+x^2}) \mid t,s\in\mathbb{R}\}=sp\{1,-2x+x^2\}$$

כתבנו פתרון מתמטי של אילוץ מערכת המשוואות
ב- $sp$

ראינו כבר:

$$W_1+W_2=sp\{\overbrace{1+x,1+x^2}^{W_1},\ \overbrace{1,-2x+x^2}^{W_2}\}$$

שימו לב שארבעת הוקטורים פורשים ל- $W_1+W_2$
אך אינם חייבים להיות בת"ל!!

נמצא איזה וקטור תלוי באחר וכך נוכל להוריד אותו

$$\alpha(1+x)+\beta(1+x^2)+\gamma(1)+\delta(-2x+x^2)=0$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (x) \\ (x^2) \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \dots \to$$

צריך להוריד את הוקטורים שבקנוני אין איברים מובילים (כלומר הוקטורים שהעמודה שלהן היא עמודת משתנה חופשי)

$W_1 \cap W_2$ : נציג את $W_1, W_2$ באופן דומה

$W_1$ כבר מוצג ככה

$$W_1=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_1+2a_2=0\}$$

$$W_2=sp\{1+x,\ 1+x^2\}$$

יהי $a_0+a_1x+a_2x^2\in V$ אז נמצא מתי קיימים $\alpha, \beta$ ככה ש-

$$\alpha(1+x)+\beta(1+x^2)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$W_2=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid \exists\alpha,\beta;\ \alpha(1+x)+\beta(1+x^2)=a_0+a_1x+a_2x^2\}=$$

$$=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid \exists\alpha,\beta;\ \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{array}\right)\begin{array}{c} (1) \\ (x) \\ (x^2) \end{array}\right\}=$$

$$= \left\{ a_0+a_1x+a_2x^2 \;\middle|\; \exists \alpha,\beta \; ; \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0-a_1-a_2 \end{array}\right) \right\} =$$

$$W_2 = \{ a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0-a_1-a_2=0 \}$$

סעיף קודם

$$W_1 = \{ a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_1+2a_2=0 \}$$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ a_0+a_1x+a_2x^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1+2a_2=0 \\ a_0-a_1-a_2=0 \end{array} \right\}$$

כדי למצוא בסיס נמצא פתרון כללי למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} a_2=t \\ a_1=-2t \\ a_0=-t \end{array}$$

כלומר

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ a_0+a_1x+a_2x^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0=-t \\ a_1=-2t \\ a_2=t \end{array} \right\} =$$

$$= \{ -t-2tx+tx^2 \mid t\in\mathbb{R} \} = Sp(-1-2x+x^2)$$

---

א

V משפט המימדים

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

<u>תרגיל</u>; יהי $V$ מ"ו ממימד אי זוגי $\dim(V)=2n+1$

ויהיו $W_1,W_2,U_1,U_2$ תתי מרחבים של $V$

כך ש- $W_1+W_2=U_1+U_2=V$

הוכיחו ש-

$$(W_1\cap U_1)+(W_1\cap U_2)+(W_2\cap U_1)+(W_2\cap U_2)\neq\{0\}$$

<u>פתרון</u>: <u>נתון</u> $U_1+U_2=V$

$$\underbrace{\dim(U_1)+\dim(U_2)-\dim(U_1\cap U_2)}_{\text{משפט המימדים}}=\dim(U_1+U_2)=\dim V=2n+1$$

$$\dim(U_1)+\dim(U_2)=2n+1+\dim(U_1\cap U_2)$$

לכן $\dim(U_1)>n$ או $\dim(U_2)>n$

נניח בה"כ ש- $\dim(U_1)\geq n+1$

באותו אופן עבור $W$, $\dim(W_1)\geq n+1$

כעת נבחן את $W_1\cap U_1$;

$$\dim(W_1\cap U_1)=\underbrace{\dim W_1}_{\geq n+1}+\underbrace{\dim U_1}_{\geq n+1}-\underbrace{\dim(W_1+U_1)}_{\leq \dim V=2n+1}\geq$$

$$\geq(n+1)+(n+1)-(2n+1)=1$$

$$\dim(W_1\cap U_1)\geq 1$$

כלומר $W_1 \cap U_1 \neq \{0\}$

לכן $(W_1 \cap U_1)+(W_1 \cap U_2)+(W_2 \cap U_1)+(W_2 \cap U_2) \neq \{0\}$

---

## מרחבי מטריצות

תהי $A \in F^{m \times n}$ אז

$$C(A) = sp\{c_1(A), \dots, c_n(A)\} = \{Ax \mid x \in F^{n \times 1}\} \subseteq F^m$$

$$\underset{\alpha_1}{x_1} \cdot c_1(A) + \underset{\alpha_2}{x_2}\, c_2(A) + \dots + \underset{\alpha_n}{x_n}\, c_n(A)$$

צ"ל של $c_i$

$$R(A) = sp\{R_1(A), \dots, R_m(A)\} = \{A^t x \mid x \in F^{m \times 1}\} \subseteq F^n \quad *$$

$$N(A) = \{x \in F^{n \times 1} \mid Ax = 0\} \subseteq F^n \quad *$$

אלגוריתם: בהינתן מטריצה $A \in F^{m \times n}$ איך מוצאים בסיס ל- $C(A), R(A), N(A)$

1. מדרגים את המטריצה
2. השורות שלא התאפסו הן בסיס ל- $R(A)$
3. העמודות המקוריות של $A$ שבהן יש איברים מובילים בצורה המדורגת, הן בסיס ל- $C(A)$
4. הפתרון הכללי הוא בסיס ל- $N(A)$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}$$ פישול:

מצאו בסיסים ל- $C(A), R(A), N(A)$

1. מדרגים את $A$

$$A\to \to \begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3&4\\0&\boxed{1}&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

2

$$R(A)=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\to$$ בסיס!!

$$C(A)=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס!!

$$N(A)=\left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{cccc} & & s & t\\ \end{array} \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\;\middle|\; \begin{array}{l}x_4=t\\x_3=s\\x_2=-t\\x_1=-3s-2t\end{array}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-2t-3s\\-t\\s\\t\end{pmatrix}\;\middle|\; t,s\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{t\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}\;\middle|\; t,s\in\mathbb{R}\right\}=Sp\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$R(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ בסיס

משפט: $\dim(R(A)) = \dim(C(A)) =$ מספר איברים מובילים בצורה המדורגת

נסמן מספר זה ב- $\text{rank}(A)$ - דרגה של המט' $A$

משפט: $A \in F^{n\times n}$ אז

$A$ הפיכה $\iff \text{rank}(A) = n$

משפט:

1. $\text{rank}(A\cdot B) \leq \text{rank}(A)$
2. $\text{rank}(A\cdot B) \leq \text{rank}(B)$

משפט: תהי $A$ מט' ו- $B$ מט' הפיכה

אז

I $\text{rank}(AB) = \text{rank}\, A$

II $\text{rank}(BA) = \text{rank}\, A$

הוכחה: I

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(\underbrace{A\cdot B}_{C}\cdot \underbrace{B^{-1}}_{D}) \overset{\text{משפט מהתחלה}}{\leq} \text{rank}(A\cdot B) \overset{\text{אותו משפט.}}{\leq} \text{rank}(A)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$$

משפט: $A \in F^{m\times n}$ - משפט הדרגה למטריצות.

$$\dim(N(A)) + \text{rank}(A) = n$$
= מספר העמודות ב- $A$

**תרגיל:** תהי $A$ ריבועית מסדר $n$

כך ש- $A^2 = 0$ הוכיחו ש- $\text{rank}(A) \le \frac{n}{2}$

**פתרון:** נניח

$$A^2 = 0_{n\times n}$$
$$\Downarrow$$
$$A \cdot A = 0_{n\times n}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall i \qquad C_i(A\cdot A) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall i \qquad A \cdot C_i(A) = 0$$
עמודה ה- $i$ היא פתרון של המערכת $Ax=0$

$$\forall i \qquad C_i(A) \in N(A)$$
$$\Downarrow \sum \alpha_i C_i(A) \in N(A)$$

כל צירוף של עמודות $A$ צריך להיות ב- $N(A)$ כי $N(A)$ הוא תת מרחב
כלומר סגור לכפל בסקלר וחיבור

$$\{\sum \alpha_i C_i(A)\} = C(A) \subseteq N(A)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{rank}(A) = \dim(C(A)) \le \dim N(A)$$
$$\downarrow$$
$$n = \underbrace{\dim N(A)}_{\ge\ \text{rank}(A)} + \dim C(A) \ge \text{rank}(A) + \text{rank}(A)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{rank}(A) \le \frac{n}{2}$$

$$A \cdot B = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$C(B) \subseteq N(A)$$

תרגיל 1: יהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נגדיר

$$B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} A \\ A^t \end{pmatrix}$$

הוכיחו / הפריכו:

1. לכל $A$ מתקיים $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to C(A) = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \to \dim C(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to C(B) = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \dim(C(A)) = 2$$

פתרון: נכון על ידי דירוג של $B$ נבצע

הפעולות $R_{n+i} - R_i$ $\quad \forall\, 1 \le i \le n$

נקבל

$$\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}(A)$$

שורות אפסים לא משפיעות על מימד

השורות לכן אין שינוי בדרגה;

---

* לכל $A$ $\quad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} C$ – לא נכון

* קיימת $A$. כך ש- $\operatorname{rank}(A) = 2\operatorname{rank}(C)$ – נכון

* קיימת $A$ כך ש- $\operatorname{rank}(A) > 2\operatorname{rank}(C)$ – לא נכון.