(1) 12.01.14
אנליזה פונק'
תרגול 12

<u>הגדרה:</u> אם X ו-Y הם מרחבים נורמיים ו- $L: X \to Y$ אופרטור לינארי אז L נקרא חסום אם קיים M כך ש: $\|Lx\|_Y \le M\|x\|_X$ (*) $\forall x \in X$
וה-M המינימלי שמקיים את (*) נקרא הנורמה של L ומסומן ב- $\|L\|$ ובפרט
$\|Lx\| \le \|L\|\cdot\|x\|$

<u>משפט:</u> L חסום ב-X אמ"מ L רציף ב-X.

<u>תרגיל:</u> על המרחב $C([a,b])$ עם נורמת הסופרמום נגדיר את האופרטור
$L: C([a,b]) \to C([a,b])$ לפי $(Lf)(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad a \le x \le b$
צריך להוכיח ש-L רציף ולמצוא את הנורמה של L.

<u>פתרון:</u> במקום להוכיח ש-L רציף נראה ש-L חסום.
ניקח $f \in C([0,1])$ ונחשב:

$$\|Lf\| = \sup_{a \le x \le b} \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \le \sup_{a \le x \le b} \int_a^x |f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

ה-sup

$$\int_a^b |f(t)|\,dt \le (b-a) \cdot \sup_{a \le x \le b} |f(x)| = (b-a)\|f\|$$

נחסום ע"י גובה בקטע
כפול אורך הקטע

ולכן: $\|Lf\| \le (b-a)\|f\|$ ולכן L אופרטור חסום.

עכשיו נמצא את הנורמה של L. כבר הראינו ש $\|Lf\| \le (b-a)\|f\|$ ולכן אם נמצא
פונקציה מסוימת g כך ש $\|Lg\| = (b-a)\|g\|$ אז הנורמה של L תהיה $b-a$.
ניקח את $g(x)=1$ ונקבל:

$$\|Lg\| = \sup_{a \le x \le b} \left|\int_a^x dt\right| = \sup_{a \le x \le b} |x-a| = b-a$$

ולכן $\|L\| = b-a$

$\|Lf\| \le \|L\|\cdot\|f\| \quad \forall f$
מינ'.
עבור f מסוים: $\|Lf\| = A \cdot \|f\|$

$\|L\| < A$
$A\|f\| = \|Lf\| \le \|L\|\cdot\|f\|$
סתירה $\to \|L\| \ge A$

② 12.01.14
אנליזה פונ׳
תרגול 10

<u>דוגמא:</u> על המרחב $C([0,2])$ נגדיר נורמה:

וכן, $\|f\| = \left(\int_0^2 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$

ונגדיר אופרטור $L: C([0,2]) \to \mathbb{R}$ ע״י $Lf = \int_0^2 f(x)\,dx$

נחשב נורמה של L.

<u>פתרון:</u> נמצא את הנורמה של L ב־2 שלבים

א. שלב ראשון - מוצאים מספר $m \geq 0$ כך ש $|Lf| \leq m\|f\|$ לכל $f \in C([0,2])$

ב. מוצאים פונקציה מסוימת $g \in C([0,2])$ כך ש $|Lg| = M\|g\|$ ואז M
יהיה הנורמה של L.

<u>תזכורת:</u> אי שוויון הולדר: אם $p,q \geq 1$ ו $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
ו $h,g \in C([a,b])$ אז:

$$\int_a^b |h(x)||g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |h(x)|^p\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{1/q}$$

ולכן:

$$|Lf| = \left|\int_0^2 f(x)\cdot 1\,dx\right| \leq \int_0^2 |f(x)|\,dx \underset{\text{הולדר}}{\leq} \left(\int_0^2 |f(x)|^p\right)^{1/p}\left(\int_0^2 1^q\,dx\right)^{1/q} = \|f\|\cdot 2^{1/q}$$

לכן $\|L\| \leq 2^{1/q}$. נחפש $g \in C([0,2])$ כך ש $|Lg| = 2^{1/q}\|g\|$

ננחש ש $g \equiv c$ ו־c קבוע חיובי ונחשב:

$$|Lg| = \int_0^2 c\,dx = 2c \overset{?}{=} \underbrace{2^{1/q}\left(\int_0^2 c^p\right)^{1/p}}_{2^{1/q}\|c\|}$$

כלומר, רוצים לבדוק האם קיים c שמקיים את השוויון: $2\cancel{c} = 2^{1/q}\cdot 2^{1/p}\cdot \cancel{c}$

ולכן קיים c כזה $\leftarrow$ $\underset{\text{הולדר}}{2} = 2^{1/q}2^{1/p}$