פיתרון בוחן בבדידה 2 למהנדסים, 83־118, סמסטר ב, ה'תשע"ט

א' אייר ה'תשע"ט, 6/5/2018

מרצה: פרופ' רון עדין.

מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: כל השאלות הינן חובה. סך הנקודות הוא 108, אך לא ניתן לצבור יותר מ־100 נקודות בסה"כ.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- אין צורך לחשב במדוייק דברים כמו $\frac{2549!}{236!}$...

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. יהיו $a, b \in \mathbb{N}$.

(א) בכמה אפשרויות ניתן לסדר a כדורים זהים ב־b תאים שונים כך שבכל תא לפחות כדור אחד. (12 נק')

(ב) בכמה אפשרויות ניתן לסדר a כדורים זהים ב־b תאים שונים כך שבכל תא לכל היותר כדור אחד. (12 נק')

(ג) בכמה אפשרויות ניתן לסדר a כדורים שונים ב־b תאים שונים כך שבכל תא לכל היותר כדור אחד. (12 נק')

פתרון:

א. אם נסמן את מס' הכדורים שנכנסו לתא ה־i ב־x_i, נקבל משוואה מהצורה $\sum_{i=1}^{b} x_i = a$ כך ש־ $\forall i : x_i \geq 1$. נפחית אחד מכל משתנה, ו־b מאגף ימין כדי לקבל משוואה מהצורה $\sum_{i=1}^{b} y_i = a - b$ כאשר כאן מתקיים: $\forall i : y_i \geq 0$ (הכוונה היא ש־$y_i = x_i - 1$). לפי מה שלמדנו מס' פתרונות המשוואה הוא:

$$\left(\binom{b}{a-b} \right) = \binom{b-1+a-b}{a-b} = \binom{a-1}{a-b}$$

ב. כל אפשרות היא בחירה של a תאים מתוך b התאים בלי חזרה (כי אסור שני כדורים בתא) ובלי חשיבות לסדר (כי הכדורים זהים). לכן נקבל:

$$\binom{b}{a}$$

ג. כל אפשרות היא בחירה של a תאים מתוך b התאים בלי חזרה (כי אסור שני כדורים בתא) ועם חשיבות לסדר (כי הכדורים שונים). לכן נקבל:

$$\frac{b!}{(b-a)!}$$

2.

(א) סקר בודק את מידת ההערכה לארבעה מוצרים. על הנסקר לנקד כל מוצר בלכל היותר 20 נק', וניתן אף לנקד בציון שלילי. הנסקר נדרש שהניקוד לארבעת המוצרים יחד יסתכם ל־30 נקודות. כמה אפשרויות עומדות בפני הנסקר? (18 נק')

(ב) כמה מחוברים שונים יש בפיתוח הביטוי $(x+y+z)^{17}$ (כאשר שונים הכוונה: $x^iy^jz^k \neq x^ry^sz^t \iff (i,j,k) \neq (r,s,t)$)? (18 נק')

פתרון:

א. זו בעצם השאלה משיעורי הבית: כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=30$, כאשר $x_i \leq 20$ שלמים (לא בהכרח אי שליליים)?

נמיר כל משתנה בנגדי שלו (כלומר, נסמן $x_i' = -x_i$) ונקבל משוואה חדשה $x_1'+x_2'+x_3'+x_4' = -30$ כאשר $x_i' \geq -20$. נוסיף 20 לכל משתנה ו־80 לאגף ימין ונקבל את המשוואה $x_1'+x_2'+x_3'+x_4' = 50$ כאשר $x_i' \geq 0$ שלם, שמספר פתרונותיה הוא: $\left(\!\binom{4}{50}\!\right) = \binom{53}{50}$.

ב. ניזכר ש־ $(x+y+z)^{17} = \sum_{n_1+n_2+n_3=17} \binom{17}{n_1,n_2,n_3} x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}$. לכן, מספר המחוברים הוא כמספר הפתרונות למשוואה $n_1+n_2+n_3=17$, שזה: $\left(\!\binom{3}{17}\!\right) = \binom{3-1+17}{17} = \binom{19}{17}$.

.3

(א) מצאו את המקדמים הבאים:

i. המקדם של x^4y^5 בפיתוח הביטוי $(x-y+z)^9$. (9 נק')

ii. המקדם של y^{23} בפיתוח הביטוי $(y^2+y^9-2)^{25}$. (9 נק')

(ב) יהי $n \geq 0$. הוכיחו את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

(18 נקודות)

פתרון:

א. 1. נקבל לפי הפיתוח המולטינומי את המקדם $-\binom{9}{4} = -\frac{9!}{4!\cdot 5!} = -\binom{9}{4,5,0}$.

2. כדי לקבל y^{23} נדרש לבחור פעם אחת את y^9, 7 פעמים את y^2, ושאר הפעמים (17) את -2. לכן נקבל את המקדם $\frac{25!}{7!\cdot 17!}\cdot -2^{17} = \binom{25}{7,1,17}(-2)^{17}$.

ב. פתרונות (אלגברית וקומבינטורית) בתרגיל בית.