3.1.16

תורת הקבוצות

תרגול 9

חזקות מונים

הגדרה: יהיו α,β מונים. אז $\alpha^\beta = |{}^\beta\alpha|$

תכונות:

1. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$
2. $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$
3. $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$.

הוכחה (נראה איך מוכיחים תכונות כאלו – של 1)

$$\beta+\gamma \underset{\text{מונים}}{=} |\beta+\gamma| = |\beta\dot\cup\gamma|$$

(במקום $\beta\times\{0\}$, $\gamma\times\{1\}$).

$$\alpha^\beta = |{}^\beta\alpha| \qquad \alpha^\gamma = |{}^\gamma\alpha|$$

$$\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma = |{}^\beta\alpha\times{}^\gamma\alpha|$$

נשאר - למצוא פונקציה חח"ע ועל מ[אוסף הפונקציות מ- $\beta\dot\cup\gamma$ ל- α] ל- [מכפלה קרטזית של פונקציות מ- β ל- α עם פונקציות מ- γ ל- α].

נקבע $g:\beta\dot\cup\gamma\to\alpha$

נגדיר $f(g) = (g\restriction_\beta, g\restriction_\gamma)$ נראה חח"ע ועל:

חח"ע: יהיו $g_1\neq g_2$. נניח δ כך ש- $g_1(\delta)\neq g_2(\delta)$

אם $\delta\in\beta$ אז $g_1\restriction\beta\neq g_2\restriction\beta$.

ואם $\delta\in\gamma$ אז $g_1\restriction\gamma\neq g_2\restriction\gamma$ בדומה...

על: $(g_1,g_2)\in{}^\beta\alpha\times{}^\gamma\alpha$ ונגדיר $g:\beta\dot\cup\gamma\to\alpha$

ע"י: אם $\delta\in\beta$ אז $g(\delta)=g_1(\delta)$

אם $\delta\in\gamma$ $g(\delta)=g_2(\delta)$.

מוגדר היטב כי β,γ זרים! מ.ש.ל!

תזכ: (1) לכל מונה κ: $2^\kappa > \kappa$.

(2) אם $\lambda \geq \mu$ אז $\kappa^\lambda \geq \kappa^\mu$

(3) אם $\kappa > \lambda$ אז $\kappa^\mu \geq \lambda^\mu$.

משפט: (הלמה של קניג)

יהיה κ מונה אינסופי. נניח $\lambda \geq cof(\kappa)$

אזי $\kappa < \kappa^\lambda$.

הוכחה: נוכיח שאין פונקציה על מ- κ ל- κ^λ.

כיוון ש- $\lambda \geq cof(\kappa)$ קיימת $f:\lambda\to\kappa$ קופי'.

תהיה $g:\kappa\to\kappa^\lambda$ נגדיר $h:\lambda\to\kappa$

כך: $h(\alpha) = \min(\kappa - \{g(\gamma)(\alpha) \mid \gamma < f(\alpha)\})$

בהגדרה משתמשים סוג של הלכסון של קנטור.

מסתכלים תמונה של אוסף של הפונקציות.

אז לכל a מסתכלים על אוסף של התמונות של α -

מתוך הנוספים את אלו שקבענו ע"י γ הקטנים מ- $f(\alpha)$

ו"מוציאים אותם". ובהגדרה לוקחים רק "קטנים"

ב- κ ...

נראה שההגדרה הנ"ל לא ריקה.

$$|\{g_\gamma(\alpha) \mid \gamma < f(\alpha)\}| \leq |f(\alpha)| < \kappa$$

κ מונה!

לכן ההפרש לא ריק! לכן קיים איבר ראשון.

נראה של- h אין מקור תחת g!

נניח שיש מקור. כלומר $\beta\in\kappa$ כך ש- $h = g(\beta)$.

f קופי' ולכן יש $\alpha<\lambda$ כך ש- $\beta < f(\alpha)$.

ולכן $g(\beta)(\alpha) \in \{g(\gamma)(\alpha) \mid \gamma < f(\alpha)\}$ אבל $h(\alpha) \notin \{\ \}$

(כי הוא מינימום של ההפרש!) סה"כ $h(\alpha) \neq g(\beta)(\alpha)$ כנדרש!

מ.ש.ל!

מסקנה: לכל מונה אינסופי $\lambda < cof(2^\lambda)$.

הוכחה: נניח בשלילה $\lambda \geq cof(2^\lambda)$.

אם $\lambda \geq cof(\kappa)$ אזי $\kappa^\lambda > \kappa$.

לכן $(2^\lambda)^\lambda > 2^\lambda$

אבל $(2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda\cdot\lambda} = 2^\lambda$ בסתירה! **מ.ש.ל!**

הגדרה: השערת הרצף (המוכללת).

$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ לכל α סודר!

משפט: אם $\kappa \geq \omega$, $0<\lambda<cof(\kappa)$.

$$\kappa^\lambda = \left(\sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda\right)\cdot\kappa$$

הוכחה: $(\geq)$ $\tau<\kappa$ לכן $\tau^\lambda \leq \kappa^\lambda$.

$$\left(\sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda\right)\cdot\kappa \leq \left(\sum_{\tau<\kappa} \kappa^\lambda\right)\cdot\kappa = \kappa\cdot\kappa^\lambda\cdot\kappa = \kappa^\lambda$$

$(\leq)$ $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$

$\lambda < cof(\kappa)$ לכן כל פונקציה מ-λ ל-κ חסומה!

לכן כל פונקציה מ-λ ל-κ היא בעצם מ-λ ל-$\tau<\kappa$ לכן ${}^\lambda\kappa = \bigcup_{\tau<\kappa} {}^\lambda\tau$

$$|{}^\lambda\kappa| = \left|\bigcup_{\tau<\kappa} {}^\lambda\tau\right| \leq \sum_{\tau<\kappa} |{}^\lambda\tau| = \sum_{\tau<\kappa} |\tau|^\lambda =$$

סודרים.

$$= \sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda \cdot \left|\text{מספר הסודרים מעוצמה } \tau\right| =$$

צריך לספור כמה סודרים יש מעוצמה. אבל עצמה

שונות.

$$= \sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda\cdot\tau^+ \leq \left(\sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda\right)\cdot\kappa$$

מ.ש.ל!

תרגיל: הוכח $\aleph_n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}\cdot\aleph_n$ לכל n.

פתרון: $n=0$. $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}\cdot\aleph_0$

כי $2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0} \le (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

נניח נכונות לקטנים ונתבונן ב- $n+1$.

$n=n+1$. $(\aleph_{n+1})^{\aleph_0} = \left(\sum_{\tau<\aleph_{n+1}} \tau^{\aleph_0}\right)\cdot \aleph_{n+1} =$

$$= \Big(\underbrace{\aleph_0^{\aleph_0} + \dots + \aleph_n^{\aleph_0}}_{\text{סכום סופי ונקח max}} + \sum_{n<\aleph_0} n^{\aleph_0}\Big)\aleph_{n+1} =$$

$$= \left(\aleph_n^{\aleph_0} + \aleph_0\cdot 2^{\aleph_0}\right)\aleph_{n+1} \underset{\text{אינדוקציה}}{=} \left(2^{\aleph_0}\cdot\aleph_n + 2^{\aleph_0}\cdot\aleph_0\right)\aleph_{n+1} =$$

$$\underset{\text{לוקחים max}}{=} 2^{\aleph_0}\aleph_n\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_0}\aleph_{n+1}$$

מ.ש.ל!

תרגיל: (מתקדם)

הוכח כי לכל מונה סינגולרי λ קיים $\lambda>\kappa$ מונה.
כך ש- $\lambda^{\kappa} > \lambda$

פתרון: אם $\kappa \ge cof(\lambda)$ אז $\lambda^{\kappa} > \lambda$

כמו בתרגיל הקודם שאפשר לבחור $\lambda>\kappa$.
כך ש- $cof(\lambda)=\omega$. ונמצא ש- $\omega \le \kappa$
כי κ מונה אינסופי. (ניקח $\aleph_{\kappa+\omega}$)
ובפרט $cof(\aleph_{\kappa+\omega}) = cof(\kappa+\omega) = \omega$

$\kappa+\omega$ גבולי

תרגיל בית 8 (ω גבולי)

מ.ש.ל!

תרגיל: הבא מונה $\kappa<\lambda$ כך ש- $cof(\lambda)=\kappa$.

פתרון: נניח κ רגולרי! כי אם $cof(\lambda)=\kappa$
אז $cof(\kappa) = cof(cof(\lambda)) = cof(\lambda) = \kappa$

נבנה מונה באינדוקציה (רקורסיה) על κ באופן הבא:

נגדיר סדרה $\{a_\alpha / \alpha<\kappa\}$.

$$a_0=\kappa \qquad a_{\beta+1}=(a_\beta)^+$$

עבור β גבולי $a_\beta=\sup\{a_\gamma / \gamma<\beta\}$

לבסוף נגדיר $\lambda=\sup\{a_\gamma / \gamma<\kappa\}$

זוהי סדרה עולה!

כאשר מתכנס היא (5) שבה נוכיח $cof(\lambda)\le cof(\kappa)=\kappa$

נניח $\kappa\not\le cof(\lambda)$ ונמצא אז $\alpha<\kappa$ כך ש: $f:\alpha\to\lambda$ קופינלי.

~~[illegible]~~ נוכל בעזרתו $f:\alpha\to\kappa$ קופינלי שמהווה סתירה.

לבנות $g:\alpha\to\kappa$ ע"י: $g(\alpha)=\min\{\gamma / f(\alpha)\in a_\gamma\}$

יהיה $\gamma<\kappa$. נמצא α כך ש- $\gamma\le g(\alpha)$.

$\{a_\gamma\}_{\gamma<\kappa}$ סדרה עולה ממש, כלומר כל איבר מוכל ממש באיבר הבא.

(וגם כל איבר מכיל את הקודמים). ונסתכל על $a_{\gamma+1}$.

קיים $\delta\in a_{\gamma+1}$ כך שלכל $\beta<\gamma+1$ $\delta\notin a_\beta$.

$f:\alpha\to\lambda$ קופינלי לכן יש θ כך ש- $f(\theta)\ge\delta$

לכן $f(\theta)$ מופיע לראשונה ב- $a_{\gamma+1}$ או אחרי!

סה"כ $\gamma<\gamma+1\le g(\theta)$.

לכן $g:\alpha\to\kappa$ קופינלי וזו סתירה לכך ש- κ רגולרי!!

מ.ש.ל!

<u>הגדרה:</u> מונה נקרא <u>גבולי חזק</u> אם לכל $\alpha<\kappa$ אז $2^\alpha<\kappa$. (כמובן גבולי חזק $\Rightarrow$ גבולי).

<u>תרגיל:</u> נניח κ גבולי חזק! - $\lambda<cof(\kappa)$ אז $\kappa^\lambda=\kappa$.

<u>פתרון:</u> $\kappa^\lambda\ge\kappa$ תמיד!

$$\kappa^\lambda=\Big(\sum_{\tau<\kappa}\tau^\lambda\Big)\kappa$$

נבדוק ש- $\tau^\lambda\le 2^{\max\{\tau,\lambda\}}$

כי $\tau^\lambda\le(2^\tau)^\lambda=2^{\tau\cdot\lambda}$

$$\kappa^\lambda\le\Big(\sum_{\tau<\kappa}2^{\max\{\tau,\lambda\}}\Big)\kappa<\Big(\sum_{\tau<\kappa}\kappa\Big)\kappa=\kappa\cdot\kappa\cdot\kappa=\kappa$$

הסברו!

מ.ש.ל!

תרגיל: יהיה κ מונה גבולי חזק.

הראו כי $\kappa^{cof(\kappa)} = 2^{\kappa}$

הוכחה: $(\le)$ $\kappa^{cof(\kappa)} \le (2^{\kappa})^{cof(\kappa)} = 2^{\kappa \cdot cof(\kappa)} = 2^{\kappa}$

$(\ge)$ נמצא פונקציה חח"ע $f : {}^{\kappa}2 \to {}^{cof(\kappa)}\kappa$

נסמן $cof(\kappa) = \alpha$

תהיה $h : \alpha \to \kappa$ קופ' ושומרת סדר.

$h[\alpha]$ קופ' ב- κ. נסמן $h[\alpha] = \{\delta_i\}$

אז $\delta_i < \kappa \Rightarrow 2^{\delta_i} < \kappa$.

κ גבולי חזק.

יש פונקציות $\forall i : g_i : {}^{\delta_i}2 \to \kappa$ חח"ע

נגדיר $f : {}^{\kappa}2 \to {}^{cof(\kappa)}\kappa$

ע"י $$f(F)(\gamma_i) = g_i(F \restriction \delta_i)$$

$$(F : \kappa \to \{0,1\})$$

נראה f חח"ע. יהיו F_1, F_2 שונות.

לכן יש $\beta \in \kappa$ כך ש $F_1(\beta) \neq F_2(\beta)$. יש γ_i כך ש-

$\delta_i = h(\gamma_i) > \beta$ (כי h קופי')

ולכן $F_1 \restriction \delta_i \neq F_2 \restriction \delta_i$

מהחח"ע של g_i $g_i(F_1 \restriction \delta_i) \neq g_i(F_2 \restriction \delta_i)$

סה"כ $f(F_1)(\gamma_i) \neq f(F_2)(\gamma_i)$ ולכן $f(F_1) \neq f(F_2)$

סה"כ f חח"ע ולכן $2^{\kappa} \le \kappa^{cof(\kappa)}$ כנדרש!

מ.ש.ל!