אינפי'1 – פתרון תרגיל 10

שאלה 1

באילו נקודות הפונקציה $[x]$ רציפה?

פתרון

ראשית נתבונן בנקודות $a \in \mathbb{Z}$. עבורן מתקיים:

$$\lim_{x \to a^+} [x] = a$$
$$\lim_{x \to a^-} [x] = a - 1$$

שכן, לכל $a < x < a+1$ מתקיים $[x] = a$, ולכל $a-1 < x < a$ מתקיים $[x] = a-1$. לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $a \neq a-1$ ולכן הגבולות החד צדדיים שונים ולכן הגבול לא קיים ומכאן הפונקציה אינה רציפה בכל נקודה $a \in \mathbb{Z}$.

כעת נתבונן ב $a \notin \mathbb{Z}$. לכל $[a] < x < [a]+1$ מתקיים $[x] = a$. מכאן נובע מיידית $\lim_{x \to a} [x] = [a]$ (איך?) ולכן הפונקציה רציפה בנקודות שאינן שלמות.

תשובה סופית: הפונקציה $[x]$ רציפה בדיוק בכל הנקודות $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

מש"ל

שאלה 2

תהי פונקציה ממשית f כך ש: $f(x) = -f(-x)$ לכל $x \neq 0$. נתון ש- f רציפה באפס. הוכיחו ש- $f(0) = 0$.

פתרון

נתון $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ נשתמש בהגדרת הגבול לפי היינה. נבנה שתי סדרות $0 \neq x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $0 \neq y_n = -\frac{1}{n} \to 0$ אבל אז לפי היינה בשל הרציפות חייב להתקיים $f(0) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n)$. לכן

$f(0) = \lim f(x_n) = \lim f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\left(-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = \lim\left(-f\left(y_n\right)\right) = -\lim f\left(y_n\right) = -f(0)$ ו

לכן $f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

שאלה 3

מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

א. $\sin\left(\frac{1}{\ln x^2}\right)$

פתרון

נקודות האי רציפות נובעות מאיפוס המכנה ומנקודת אי ההגדרה של ה $\ln$.
לכן נקודות אי הרציפות הינן $-1,0,1$.

עבור $x=0$, $\lim_{x\to 0}\ln x^2=-\infty$ ולכן $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln x^2}=0$ ומכיוון ש $\sin$ רציפה באפס ההרכבה שואפת לאפס, כלומר $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{\ln x^2})=0$ ולכן זו אי רציפות סליקה.

עבור $x=1$, נראה שהגבול החד צדדי $\lim_{x\to 1^+}\sin(\frac{1}{\ln x^2})=0$ אינו קיים ולכן זו אי רציפות מהמין השני. ניקח את הסדרות $x_k=\sqrt{e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}}}, y_k=\sqrt{e^{\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}}}$ קל לראות שסדרות אלה שואפות לאחד מכיוון ש $e^0=1$, וגדולות ממש מאחד. מתקיים $\sin\left(\frac{1}{\ln x_k^2}\right)=1$, $\sin\left(\frac{1}{\ln y_k^2}\right)=-1$ ולכן הגבול החד צדדים לא קיים.

עבור $x=-1$, זו נקודת אי רציפות מהמין השני עם הוכחה דומה.

ב. $\cos\left(\frac{3x-2}{|3x-2|}\right)$

פתרון

נקודת אי הרציפות היחידה היא $x=\frac{2}{3}$. נחשב את הגבולות החד צדדיים:

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\cos\left(\frac{3x-2}{|3x-2|}\right)=\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\cos\left(\frac{3x-2}{3x-2}\right)=\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\cos 1=\cos 1\ ;$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^-}\cos\left(\frac{3x-2}{|3x-2|}\right)=\lim_{x\to\frac{2}{3}^-}\cos\left(\frac{3x-2}{-(3x-2)}\right)=\lim_{x\to\frac{2}{3}^-}\cos(-1)=\cos(-1)\ .$$

הגבולות החד צדדיים קיימים, סופיים ושונים ולכן זו נקודת אי רציפות ממין ראשון.

ג. $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$

פתרון

נקודות אי הרציפות הן $x_k=\pi k$. $(\sin x)^2$ תמיד חיובי, ולכן $-\frac{1}{(\sin x)^2}$ שואף

למינוס אינסוף ולכן $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$ שואף לאפס. לכן כל נקודות אי הרציפות הינן סליקות.

מש"ל

שאלה 4

תהיינה f,g פונקציות רציפות בקטע $[0,1]$ המקיימות $g([0,1])=[0,1]$ ו- $f([0,1])\subseteq[0,1]$. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ שעבורה $f(x_0)=g(x_0)$.

פתרון

נתבונן בפונקציה $h(x)=f(x)-g(x)$. h רציפה ב $[0,1]$ כהפרש רציפות.

$g([0,1])=[0,1]$. לכן קיימות $x_1,x_2\in[0,1]$ שונות כך ש

$g(x_1)=0,\ g(x_2)=1$. מצד שני $f([0,1])\subseteq[0,1]$ ולכן בהכרח

$f(x_1)\geq 0,\ f(x_2)\leq 1$. מכאן,

$$h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=f(x_1)-0=f(x_1)\geq 0$$
$$h(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-1\leq 0$$

לכן $h(x_1)\geq 0\geq h(x_2)$. בה"כ $x_2>x_1$ (אחרת פשוט מתבוננים בקטע $[x_2,x_1]$).

h רציפה ב- $[x_1,x_2]$ (שכן אפילו רציפה ב $[0,1]$) וכמו כן $h(x_1)\geq 0\geq h(x_2)$.

לכן ממשפט ערך הביניים נקבל שקיימת נקודה $x_0\in[x_1,x_2]\subseteq[0,1]$ שעבורה

$f(x_0)-g(x_0)=h(x_0)=0$. מכאן $f(x_0)=g(x_0)$.

מש"ל

שאלה 5

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,a]$, כך שמתקיים $f(a)=f(0)$.

הוכיחו שקיים $x_0\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כך ש- $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$.

פתרון

נתבונן בפונקציה $h(x)=f\left(x\right)-f\left(x+\frac{a}{2}\right)$. f רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ וכמו כן $f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כהרכבת רציפות ($x+\frac{a}{2}$ רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ ו f רציפה ב $\left[\frac{a}{2},a\right]$) לכן בסה"כ h רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כהפרש רציפות. בשל הנתון $f\left(a\right)=f\left(0\right)$ מתקיים:

$$h(0)=f(0)-f(\frac{a}{2})$$

$$h(\frac{a}{2})=f(\frac{a}{2})-f(a)=f(\frac{a}{2})-f(0)$$

נשים לב ש $h(0)=-h(\frac{a}{2})$. אם $h(0)=-h(\frac{a}{2})=0$ סיימנו שכן עבור $x_0=0$ נקבל הדרוש. אחרת, בהכרח 0 בין $h(0)$ ל $h(\frac{a}{2})$ (כי הם שוני סימן) וממשפט ערך הביניים ביחס ל h ולקטע $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ נקבל שקיימת $x_0\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כך ש $h(x_0)=0$. מכאן נסיק ש $f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$.

מש"ל

שאלה 6

הראו שאם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ואם הגבולות של f ב-$\pm\infty$ קיימים וסופיים, אזי הפונקציה חסומה ב-$\mathbb{R}$.

פתרון

נניח ש $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=A\in\mathbb{R}$ ו- $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=B\in\mathbb{R}$. מכיון ש- $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=A\in\mathbb{R}$ קיים $N>0$ כך שלכל $x>N$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-A\right|<\frac{1}{2}$ או באופן שקול:

. $A-\frac{1}{2}<f(x)<A+\frac{1}{2}$ מכיון ש- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=B\in\mathbb{R}$ קיים $T<0$ כך שלכל $x<T$ מתקיים $|f(x)-B|<\frac{1}{2}$ או באופן שקול: $B-\frac{1}{2}<f(x)<B+\frac{1}{2}$. f רציפה ב $\mathbb{R}$ ולכן רציפה בפרט ב$[T,N]$. לכן עפ"י משפט ויירשטראס מתקבלים מינימום ומקסימום בקטע $[T,N]$. מכאן קיימים $m,M\in\mathbb{R}$ כך ש $m\le f(x)\le M$ $\forall x\in[T,N]$. יהיו $Q=\min\left\{A-\frac{1}{2},B-\frac{1}{2},m\right\},P=\max\left\{A+\frac{1}{2},B+\frac{1}{2},M\right\}$. קל לראות מכל הטיעונים לעיל ש $Q\le f(x)\le P$ לכל $x\in\mathbb{R}$. מכאן הפונקציה חסומה.

מש"ל

שאלה 7

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$. הראו שהפונקציה מקבלת מינימום ב- $\mathbb{R}$.

פתרון

(דומה מאד לשאלה שהופיעה בתרגול) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ובפרט מוגדרת באפס. יהי $L=f(0)\in\mathbb{R}$. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ ולכן בפרט קיימים $N>0$ ו- $T<0$ כך שלכל $x\in[N,\infty)\cup(-\infty,T]$ מתקיים $L<f(x)$.(*)

f רציפה ב- $\mathbb{R}$ ולכן רציפה בפרט ב-$[T,N]$. לכן עפ"י משפט ויירשטראס מתקבל מינימום בנקודה כלשהי $x_0\in[T,N]$. כלומר קיים $m\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x_0)=m\le f(x)$ $\forall x\in[T,N]$. $0\in[T,N]$ ולכן בפרט $L=f(0)\ge m$. מכאן ומ- (*) נקבל מיד ש- $f(x_0)=m\le f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. מכאן שהפונקציה מקבלת מינימום ב- $\mathbb{R}$.

מש"ל