שיעורי בית מספר 9

(בדידה למורים תשעט סמסטר ב)

1. עבור הפונקציות הבאות, קבעו האם הן חח"ע,על, הפיכות. במידה והפיכות, מצאו את ההופכית שלהן.

(א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ המוגדרת $f(x)=\lfloor x\rfloor$ (עיגול כלפי מטה).
פתרון:

- חח"ע: הפונקציה לא חח"ע כי, למשל, $f(3)=f(3.1)$
- על: הפונקציה על. הוכחה: יהא $n\in\mathbb{Z}$ אזי $f(n)=n$ ולכן n הוא המקור של עצמו.
- הפיכות: הפונקציה לא הפיכה כי היא לא חח"ע.

(ב) $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ המוגדרת $f(a.b)=a-b$.
פתרון:

- חח"ע: הפונקציה לא חח"ע כי, למשל, $f(3,1)=f(4,2)$
- על: הפונקציה על. הוכחה: יהא $n\in\mathbb{Z}$ אם $n>0$ אזי $(n,0)$ מקור ל n (כי $f(n.0)=n$). אם $n<0$ אז $-n\in\mathbb{N}$ ו $(0,-n)$ מקור (כי $f(0,-n)=n$). אם $n=0$ אזי $(1,1)$ מקור (כי $f(1,1)=0$).
- הפיכות: הפונקציה לא הפיכה כי היא לא חח"ע.

(ג) עבור שתי קבוצות A,B, הפונקציה $f:A\times B\to B\times A$ המוגדרת $f((a,b))=(b,a)$.
פתרון:

- חח"ע: הפונקציה חח"ע. הוכחה: נניח $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times B$ מקיימים $f(a_1,b_1)=f(a_2,b_2)$. לפי הגדרה $(b_1,a_1),(b_2,a_2)$ ולכן $b_1=b_2,a_1=a_2$ ולכן $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$ כנדרש.
- על: הפונקציה על. הוכחה: יהא $(b,a)\in B\times A$ אזי $(a,b)\in A\times B$ מקור.
- הפיכות: הפונקציה הפיכה כי היא חח"ע ועל. ההפוכית של f, $f^{-1}:B\times A\to A\times B$ מוגדרת ע"י $f^{-1}((b,a))=(a,b)$שהרי לכל $(a,b)\in A\times B$ מתקיים

$$f^{-1}f(a,b)=f^{-1}(b,a)=(a,b)$$

ובנוסף, לכל $(b,a)\in B\times A$ מתקיים

$$ff^{-1}(b,a)=f(a,b)=(b,a)$$

(ד) $f:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$ המוגדרת $f(n)=\{k\in\mathbb{N}\,|\,k\leq n\}$

פתרון:

- חח"ע: הפונקציה חח"ע. הוכחה: נניח n,m טבעיים שמקיימים $f(n)=f(m)$. אזי לפי הגדרה כי, $\{k\in\mathbb{N}\,|\,k\leq n\}=\{k\in\mathbb{N}\,|\,k\leq m\}$. כיוון ש $n\in\{k\in\mathbb{N}\,|\,k\leq n\}$ נקבל כי $n\in\{k\in\mathbb{N}\,|\,k\leq m\}$ ולכן $n\leq m$. באופן דומה, מכך ש $m\in f(m)=f(n)$, נקבל כי $m\leq n$ וביחד נקבל כי $m=n$ (מכך ש"קטן שווה" הוא אנטי סימטרי).
- על: הפונקציה אינה על. למשל ל $\emptyset\in P(\mathbb{N})$ אין מקור. הוכחה לכל n טבעי $f(n)\neq\emptyset$ שהרי $n\in\{k\in\mathbb{N}\,|\,k\leq n\}=f(n)$.
- הפיכות: הפונקציה לא הפיכה כי היא אינה חח"ע.

(ה) $f:\mathbb{N}\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ המוגדרת $f\left((n,A)\right)=A\cup\{n\}$

פתרון:

- חח"ע: הפונקציה אינה חח"ע. שהרי $f(2,\{1,2\})=\{1,2\}=f(1,\{1,2\})$.
- על: הפונקציה אינה על. למשל ל $\emptyset\in P(\mathbb{N})$ אין מקור. הוכחה לכל n טבעי ולכן A ת"ק של הטבעיים מתקיים כי $f(n,A)=A\cup\{n\}\neq\emptyset$ שהרי $n\in A\cup\{n\}$.
- הפיכות: הפונקציה לא הפיכה כי היא אינה חח"ע ואינה על.

2. יהיו A,B,C,D קבוצות לא ריקות ו $f:A\to B$ פונקציה ו$g:C\to D$ פונקציה. נגדיר $h:A\times C\to B\times D$ ע"י: $h((a,c))=(f(a),g(c))$. הוכיחו:

(א) אם f,g חח"ע אזי h חח"ע.

פתרון:

נניח f,g חח"ע ונרצה להוכיח כי h חח"ע. יהיו $(a_1,c_1),(a_2,c_2)\in A\times C$ כך ש $h\left(a_1,c_1\right)=h\left(a_2,c_2\right)$ (צ"ל: $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)$). מהגדרת h נקבל כי

$$(f(a_1),g(c_1))=(f(a_2),g(c_2))$$

ולפי הגדרת זוג סדור נקבל כי

$$[f(a_1)=f(a_2)]\wedge[g(c_1)=g(c_2)]$$

כיוון ש f,g חח"ע נקבל כי $[a_1=a_2]\wedge[c_1=c_2]$ שגורר כי $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)$.

(ב) אם f,g על אזי h על.

פתרון:

נניח f,g על ונרצה להוכיח כי h על. יהי $(b,d)\in B\times D$ ונרצה למצוא $(a,c)\in A\times C$ כך ש $h\left(a,c\right)=(b,d)$. כיוון ש f,g על קיימים $a\in A,c\in C$ כך ש

$$f(a)=c,g(c)=d$$

לכן, לפי הגדרת h נקבל כי

$$h\left(a,c\right)=(f(a),g(c))=(b,d)$$

והזוג (a,c) הוא מקור לזוג (b,d) (תחת הפונקציה h) כנדרש.