קורס טופולוגיה, אוניברסיטת בר-אילן, 2022

מרצה: מיכאל מגרל **megereli@math.biu.ac.il** אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 1

מילות מפתח: התכנסות, רציפות, קבוצות פתוחות, טופולוגיה ... Topology =Topos+Logos

Topology $\supset$ {Algebraic Topology, Topological Algebra, Differential Topology, …}

מרחב מטרי -- אחת מהדרכים לקבלת מרחבים טופולוגיים.

{Metric Spaces} → {Topological Spaces} (לא על, לא חח"ע)

מרחבים מטריים קישור מומלץ

הגדרה (Frechet 1906): **מטריקה** (או **מרחק**) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה

$$d : X \times X \to [0,\infty) \qquad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

אקסיומות:

m_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (אי שוויון המשולש).

(שקול: $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n)$) **אינדוקציה !**

אומרים ש - (X,d) **מ"מ** (metric space).

דוגמאות:

1) $(\mathbb{R},d)$ שמוגדרת לפי $d(x,y) = |x-y|$

2) $X = \mathbb{R}^n$ $x = (x_1,\ldots,x_n)\ ,y = (y_1,\ldots,y_n)$

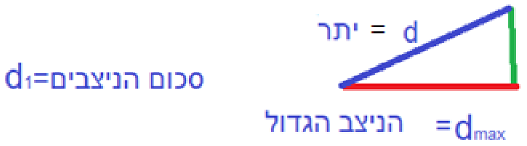
א. מטריקה אוקלידית $(\mathbb{R}^n,d)$ $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

ב. מטריקת הסכום *Manhattan metric* $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

ג. מטריקת המקסימום $d_{\max}(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1,\cdots,n\}\}$

הערה: $d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq n d_{\max}$.

מקרה של n=2



<u>הגדרה:</u> (**מרחב נורמי**) נניח E מרחב ווקטורי על שדה $\mathbb{R}$.

פונקציה $\|\cdot\|: E \to [0,\infty)$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

$(n_1$ $\quad \|\mathrm{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{v} = 0_E$

$(n_2$ $\quad \|\mathrm{cv}\| = |\mathrm{c}| \cdot \|\mathrm{v}\|$ לכל $c \in \mathbb{R}, v \in E$

$(n_3$ $\quad \|\mathrm{u} + \mathrm{v}\| \le \|\mathrm{u}\| + \|\mathrm{v}\|$

אז $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** normed space

משפט: לכל מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ הפונקציה $d_{\|\cdot\|}(u,v) := \|u - v\|$ $\quad d_{\|\cdot\|} : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to [0,\infty)$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) **ותמיד מתקיים** $\|\mathrm{v}\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, \mathrm{v})$.

הוכחה:

$(m_1$ $\quad d(x,y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0_E \Leftrightarrow x = y$

$(m_2$ $\quad \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \cdot \|y - x\| = \|y - x\|$

$(m_3$ $\quad \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \le \|x - y\| + \|y - z\|$

$\|\mathrm{v}\| = \|-v\| = \|0_E - \mathrm{v}\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, \mathrm{v})$.

הערה: "ההתאמה" $(E, \|\cdot\|) \mapsto (\mathrm{E}, d_{\|\cdot\|})$ $\quad \{normed\ spaces\} \to \{metric\ spaces\}$

א. **לא על**

הסבר: למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת "בתמונה" של ההתאמה הנ"ל.

ב. **חד חד ערכית**

הסבר: נובע מהשוויון $\|\mathrm{v}\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, \mathrm{v})$. מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה.

דוגמאות של מרחב נורמי:

- במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$ בעל ממד n נגדיר:

א. נורמה אוקלידית $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\| x \|_\infty = \| x \|_{\max} = \max\{| x_i | : i \in \{1,\cdots,n\}\}$

(משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\| x \|_{\max} \le \| x \| \le \| x \|_1 \le n \| x \|_{\max}$

* בקבוצה $C[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \ \ continuous \ \ functions\}$ נגדיר:

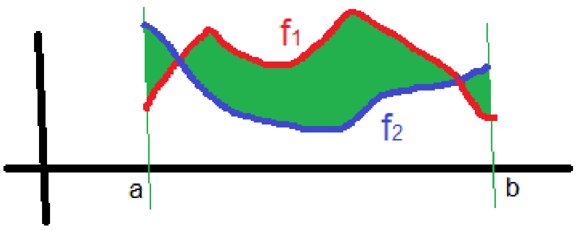
א. $\| f \|_{\max} = \max\{| f(x) | : x \in [a,b]\}$. מסמנים גם $\| f \|_\infty$.

משרה מטריקת מקסימום $d_{max}(f_1,f_2) = \max_{a\le x\le b} |f_1(x) - f_2(x)|$ (מדוע מתקבל *Max* ?)

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות f_1, f_2 בקטע נתון.

ב. $\| f \|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$ משרה "מטריקת השטחים" $d_1(f_1,f_2) = \int_a^b | f_1(x) - f_2(x) |\, dx$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות f_1, f_2 בקטע $[a,b]$



הגדרה: (X,d) נקרא **מרחב פסאודו-מטרי** ($pseudometric$, נקרא $semimetric$ לפעמים) אם:

m_1^p) $x = y \Leftarrow d(x,y) = 0$ (החלשה של m_1).

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3) $d(x,y) + d(y,z) \ge d(x,z)$

הגדרה: (X,d) נקרא **מרחב אולטרה-מטרי** ultrametric אם:

m_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3^u) $\max\{d(x,y), d(y,z)\} \ge d(x,z)$ (חיזוק של m_3).

$\{pseudometric\} \supset \{metric\} \supset \{ultrametric\}$

הערה: לכל מטריקה d גם $c \cdot d$ מטריקה $\forall c > 0$ (נכון גם עבור פ"מ, אולטרה-מטריקה)

- לכל קבוצה X נגדיר $\forall x, y \in X: d_0(x, y) = 0$
  פסאודו מטריקת האפס.
- ב - $X = \mathbb{R}^2$, נגדיר $\rho_1(x, y) := |x_1 - y_1|$

פסאודו-מטריקה (אבל לא מטריקה). למשל $\rho_1((3,5), (3,18)) = 0$.

ב - $X = \mathbb{R}^n$, נגדיר $\rho_k(x, y) := |x_k - y_k|$ (הרכיב ה k)

- ב $X = C[0,5]$ $\|f\|_{1 \le x \le 2} = \max\{|f(x)| : x \in [1,2]\}$ semi-norm (מדוע לא נורמה ?)
- נגדיר על קבוצה X " אולטרה-מטריקת 0-1":

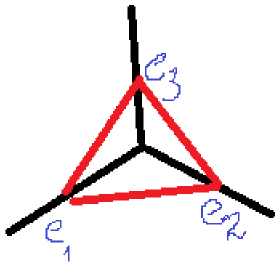
$$d_\Delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x \ne y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

טענה: על כל קבוצה X עם $|X| \ge 2$ יש (לפחות) $\aleph = 2^{\aleph_0}$ מטריקות שונות.

הסבר: $card\{rd_\Delta : r > 0\} = card(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$ העוצמה

תרגיל: $X = \left\{\frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}}\right\} \subset \mathbb{R}^n$

עם מטריקה שמושרית מ d נותן דוגמה ספציפית של d_Δ.



הסבר: $d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \left\|\frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\|e_i - e_j\|}_{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1 & i \ne j \\ 0 & i = j \end{cases}$

נשים לב: כאשר $i \ne j$ $\|e_i - e_j\| = \sqrt{\dots + 1^2 + \dots + 1^2 + \dots} = \sqrt{2}$

- **דוגמה חשובה:** על שלמים $\mathbb{Z}$ נגדיר **מטריקה p-אדית** לכל מספר ראשוני $p \in \mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{p^{k(x,y)}}, k(x, y) := \max\{i : p^i | (x - y)\}, & x \ne y \\ 0, & x = y \end{cases}$$ אולטרה-מטריקה

למשל: $x = 24,\ y = 6,\ p = 3$. $d_3(24,6) = ?$

$d_3(24,6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

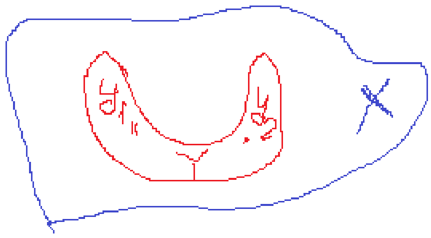
$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$

$d_3(0,5) = d_3(0,1) = 1$

דוגמה חשובה: (קובית קנטור) ב $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, \cdots): \quad a_k \in \{0,1\}\}$

$d(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{2^{k(x,y)}}, k(x,y) := \min\{i : \ x_i \neq y_i\}, \ x \neq y \\ 0, \ x = y \end{cases}$ אולטרה-מטריקה

הגדרה (תת מרחב מטרי): יהי (X,d) מ"מ, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.



מטריקת הצמצום של Y מוגדרת:

$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

$$\forall y_1, y_2 \in Y$$

מתקבל מ"מ (Y, d_Y) שנקרא **תת מרחב מטרי** של (X,d).

למשל: $\underbrace{Y = \left\{\frac{e_i}{\sqrt{2}}, 1 \leq i \leq n\right\}}_{\text{ת"מ מטרי}} \subset \underbrace{(\mathbb{R}^n, d)}_{=X}$

מטריקת הצמצום על Y כאן שווה ל - d_Δ.

הערה: כל מ"מ הוא תת מרחב מטרי (עד כדי איזומטריה) של מרחב נורמי (נוכיח בהמשך).

הגדרה: נתון מ"מ (X,d), $\emptyset \neq A, B \subseteq X$.

$$\boldsymbol{d(A,B)} = \inf\{d(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

$$0 \leq d(A,B) < \infty$$

אזהרה: זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $P(X)$ של תת קבוצות.

הערה: לא תמיד inf ניתן להחליף ב - min.

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

$$min \neq inf = d(A,B) = 0$$

אישוויון חשוב: תמיד מתקיים $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ (ראו בתירגול)

הגדרה (הקוטר): $\boldsymbol{diam(A)} := \sup\{d(x,y) | x,y \in A\}$

$$0 \leq diam(A) \leq \infty$$

A נקראת **חסומה** אם $diam(A) < \infty$.

הערה: לא תמיד $sup = max$ $\quad A = (0,1) \quad max \ldots \neq sup \ldots = diam = 1$

דוגמה: $diam(\mathbb{Z},d_p)=1$.

$$\frac{1}{p^k}\le 1 \quad \forall k\in\{0,1,\cdots\} \quad d_p(0,1)=1$$

הגדרות: יהי (X,d) , $a\in X$, $r>0$.

1) **כדור פתוח** עם מרכז ב – a ורדיוס r = $a\in B(a,r)=B_r(a):=\{x\in X|d(a,x)<r\}$

2) **כדור סגור** $a\in B[a,r]=B_r[a]:=\{x\in X|d(a,x)\le r\}$

3) **ספרה** *sphere* $a\notin S(a,r)=S_r(a):=\{x\in X|d(a,x)=r\}$

הערה: $a\in B(a,r)\subseteq B[a,r]$ $\quad \underbrace{S(a,r)}_{a\notin}\subsetneq\underbrace{B[a,r]}_{a\in}$

דוגמה: לתאר $B(a,r),B[a,r],S[a,r]$ במרחב (X,d_{Δ}).

למשל: $S[a,r]=\begin{cases}\varnothing & 0<r\neq 1\\ X\setminus\{a\} & r=1\end{cases}$ .... (המשיכו !)

דוגמה: ב $(\mathbb{Z},d_3)$ $\quad B[0,\frac{1}{3}]=3\mathbb{Z}$

הסבר: $B[0,\frac{1}{3}]=\{x\in\mathbb{Z}:\ \ d_3(x,0)\le\frac{1}{3}\}=\{x\in\mathbb{Z}:\ \ 3|x\}=3\mathbb{Z}$

תכונות: (לבדוק !)

א) $0<r_1\le r_2\Rightarrow B_{r_1}(a)\subseteq B_{r_2}(a)$.

ב) $diam(B_r(a))\le 2r$ (לא תמיד שווה. דוגמה ?).

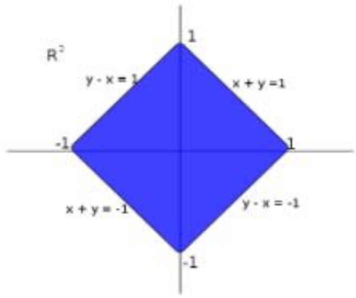
ג) $A\subseteq X$ חסומה $\Leftrightarrow \exists z\in X,\exists r>0: A\subseteq B_r(z)$.

ד) (**כדור בתת מרחב**) $B_{d_Y}(y,\epsilon)=B(y,\epsilon)\cap Y$

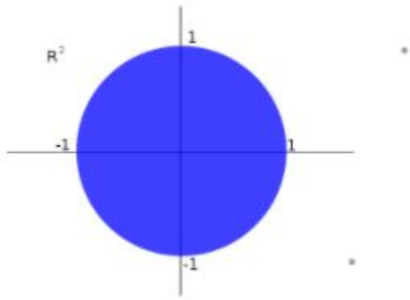
ה) $d\le\rho\Rightarrow B_\rho(a,r)\subseteq B_d(a,r)$

דוגמה: לתאר $B(a,r)$ במרחבים $(\mathbb{R}^2,d_{max}),(\mathbb{R}^2,d_1),(\mathbb{R}^2,d)$

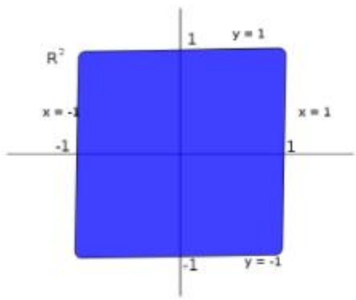
- The metric induced by $\|\cdot\|_1$ in that case, the unit ball is: $|x|+|y|<1$



- The metric induced by $\|\cdot\|_2$ in that case, the unit ball is: $\sqrt{x^2+y^2}<1$



- The metric induced by $\|\cdot\|_\infty$ in that case, the unit ball is: $\max\{|x|,|y|\}<1$



<u>הגדרה:</u> $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש – f

שיכון איזומטרי אם **שומרת מרחקים**, כלומר $\forall x_1,x_2\in X: \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)$

איזומטריה אם $\begin{cases} f(X)=Y \\ f \text{ שומרת מרחקים} \end{cases}$

<u>טענה:</u> כל שיכון איזומטרי תמיד חח"ע.

<u>הוכחה:</u> אם $x_1\neq x_2$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$

אז לכן $0=\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)\underbrace{>}_{m_1}0$

בסתירה!

■

שימו לב: אם $f:X\to Y$ שיכון איזומטרי אם ורק אם $f:X\to f(X)$ איזומטריה.

הערה: איזומטריה ב $Metr$ בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריות.

- $[8,10] \not\simeq [1,2] \simeq [5,6]$

הסבר: הזזה ל 4 יחידות בממשיים היא איזומטריה
$T_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4 + x$

משרה איזומטריה $[1,2] \to [5,6]$

ב $[8,10]$ קיימות נקודות x, y כך ש $d(x,y) = 2$ אבל לא ב $[1,2]$.

(הסבר אחר: המרחבים עם קוטר שונה. אבל **קוטר נשמר ע"י איזומטריה**)

- שיכון איזומטרי לינאר $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \le n$ (**להשלים**)
- כל הזזה $T_a(v) = a + v$ $T_a : E \to E$ במרחב נורמי $a \in E$ היא איזומטריה.

הסבר: $\| (a+v_1) - (a+v_2) \| = \| v_1 - v_2 \|$

- כל הזזה $T_a(x) = a + x$ $T_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ היא איזומטריה.

(**להשלים**)

- $(\mathbb{Z}, d_5)$ לא איזומטרי עם $(\mathbb{Z}, d_3)$.

הסבר: ב $(\mathbb{Z}, d_5)$ קיימות נקודות x, y כך ש $d_5(x,y) = \frac{1}{5}$ אבל לא ב $(\mathbb{Z}, d_3)$.

- קיים שיכון איזומטרי $\mathbb{R}^n \to l_2$.

(**להשלים**) דומה למקרה של $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \le n$.

- קיים שיכון איזומטרי $(\mathbb{N}, d_\Delta) \to l_2$.

הסבר מהיר: $n \mapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}$, $(\mathbb{N}, d_\Delta) \to \{\frac{e_n}{\sqrt{2}} : n \in \mathbb{N}\}$ איזומטריה.

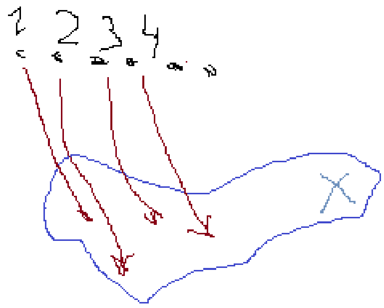
הערה: *מרחב הילברט סדרתי* $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$

$\| x \| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ $\quad < x, y > := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ מכפלה סקלרית (פנימית)

התכנסות סדרות

הגדרה (תזכורת): **סדרה** x_n בקבוצה X היא פונקציה $f : \{1, 2, \cdots\} = \mathbb{N} \to X, n \mapsto f(n) = x_n$.

תת סדרה x_{n_k} היא צמצום הפונקציה על תת קבוצה אינסופית $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$



<u>הגדרה:</u> אומרים שסדרה x_n **מתכנסת** ל $a \in X$ במרחב (X,d)

ונסמן $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (או $x_n \xrightarrow{d} a$) אם מתקיים:

הגדרה 1: $\lim_{n\to\infty} d(a,x_n) = 0$

הגדרה 2: כל ε-סביבה $B(a,\varepsilon)$ של a מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה x_n

הגדרה 3: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \ge n_\varepsilon \Rightarrow d(a,x_n) < \varepsilon$

דוגמה: ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ $\lim_{n\to\infty} 3^n = 0$

הסבר: $d_3(3^n, 0) = \frac{1}{3^n} \to 0$.

<u>הערה:</u>

- סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול !) בכל מרחב (X,d).
- תת סדרה של סדרה מתכנסת גם מתכנסת (ברור מה הגבול !)
- נניח $\rho \le d$. אז $x_n \xrightarrow{d} a \;\Leftarrow\; x_n \xrightarrow{\rho} a$.

הסבר: $0 \le \rho(a,x_n) \le d(a,x_n) \to 0$ בעזרת *תכונת סנדוויץ'* $\rho(a,x_n) \to 0$.

- התכנסות ב $\mathbb{R}^n$ היא התכנסות רכיב-רכיב.

הסבר: התכנסות גוררת "התכנסות רכיב-רכיב" כי $0 \le \| v^{(m)} - u \|_k \le \| v^{(m)} - u \| \xrightarrow{m\to\infty} 0$

($\| x \|_k$ "סמי-נורמה לפי קואורדינטה ה k " שהגדרנו)

גם ההפך נכון. תשתמשו בזה ש $\sum_{k=1}^{n} \| v \|_k =$ "נורמה של הסכום".

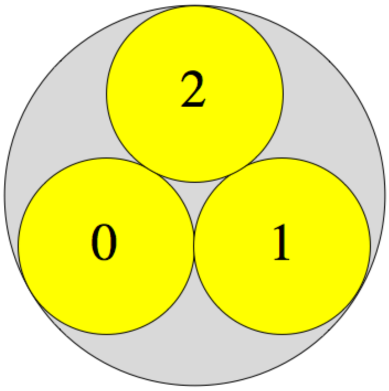
תרגיל: תנו דוגמה של סדרה לא מתכנסת ב l_2 שמתכנסת רכיב-רכיב.

הסבר: הסדרה הבאה מתכנסת רכיב רכיב לווקטור האפס

$e_1=(1,0,0,0\cdots)$
$e_2=(0,1,0,0\cdots)$
$e_3=(0,0,1,0\cdots)$
$\cdots$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת כי $\forall i\neq j \quad d(e_i,e_j)=\sqrt{2}$

***תרגיל:** לפי האיור הבא תרכיבו ניסוח לתרגיל אפשרי לגבי מ"מ $(\mathbb{Z},d_3)$



ניסוח אפשרי: המרחב אפשר להציג כאיחוד של שלושה כדורים סגורים עם רדיוס $\frac{1}{3}$.

הסבר: $B_{\frac{1}{3}}[0]\cup B_{\frac{1}{3}}[1]\cup B_{\frac{1}{3}}[2]=3\mathbb{Z}\cup(3\mathbb{Z}+1)\cup(3\mathbb{Z}+2)=\mathbb{Z}$

הגדרה: נק' $a\in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם $\exists\epsilon>0:\ \ B(a,\epsilon)=\{a\}$

דוגמאות: א. אין נקודה מבודדת ב $\mathbb{R}$ או ב $\mathbb{Q}$ ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב $X=[0,1]\cup\{3\}$ של $\mathbb{R}$.

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרא **דיסקרטי** אם כל נקודה ב X מבודדת.

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, כל מרחב X עם מטריקת 0-1 הם דיסקרטיים.
- (Hamming distance)

בקבוצה $F(\mathbb{N})=\{(x_1,x_2,\cdots):\quad x_i\in\{0,1\}\ \ \exists\, k\in\mathbb{N}\ x_i=0\ \ \forall\, i>k\}$

$$d_H(x,y)=\sum_i|x_i-y_i|$$

$(F(\mathbb{N}),d_H)$ מרחב מטרי כך שהטופולוגיה שלו היא דיסקרטית.

המשמעות של $d_H(x,y)$ היא מספר ההבדלים בין המילים x,y.

מ"מ $(F(\mathbb{N}),d_H)$ משוכן לתוך מרחב נורמי $l_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots):\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty\}$.

הרצאה 2

משפט: a נקודה מבודדת במרחב **מטרי** (X,d) אם ורק אם

$\lim x_n = a$ גורר שהסדרה x_n היא בהכרח קבועה לבסוף $x_1,\cdots,x_m,a,a,\cdots$.

בכיוון שני נוכיח יותר: **אם a לא מבודדת אז שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a.**

הוכחה: אם a מבודדת אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$.

(כיוון ראשון) נניח ש $\lim x_n = a$.

עבור ε הנ"ל קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n \in B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$. אז הסדרה היא לבסוף a.

(כיוון שני) נניח כעת שנקודה a לא מבודדת.

נוכיח: **שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a.**

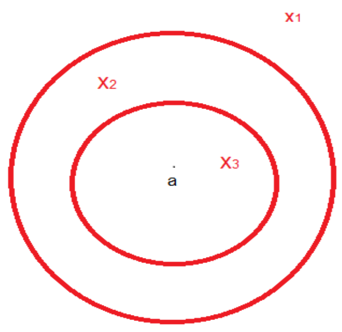
נבחר $x_1 \neq a$ (אם לא קיים אז המרחב הוא נקודון $X=\{a\}$ והנקודה מבודדת).

נעיר ש $0 < d(a,x_1)$ כי (X,d) מרחב מטרי ומתקיימת m_1.

נבחר $0<\varepsilon_1<\min\{d(a,x_1),1\}$

בגלל ש a לא מבודדת קיים $x_2 \in B(a,\varepsilon_1), x_2 \neq a$.

נעיר ש $x_2 \neq x_1$ כי $d(a,x_2)<d(a,x_1)$. וגם $d(a,x_2)<1$.



נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה.

אם כבר הגדרנו $x_1,\cdots,x_n$ (שונים) $d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$

ולא שווים ל a עם התנאי $\forall 1<k\le n \;\; d(a,x_k)<\frac{1}{k-1}$

אז נבחר ε_n שמקיים $0<\varepsilon_n<\min\{d(a,x_n),\frac{1}{n}\}$

ונבחר x_{n+1} כך ש $x_{n+1}\neq a$, $d(a,x_{n+1})<\varepsilon_n$ (שוב, שימו לב ש a לא מבודדת)

אז $d(a,x_{n+1})<d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$.

כך נקבל סדרה עם איברים שונים ו $\lim x_n=a$ כי לכל $n>1$ $d(a,x_n)<\frac{1}{n-1}\to 0$.

☺

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב $(\mathbb{Z},d_p)$.

הסבר: $\forall a\in\mathbb{Z}$ $a+p^n\xrightarrow{d_p}a$ סדרה עם איברים שונים שמתכנסים ל a .

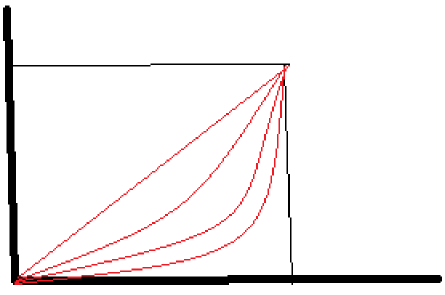
<u>דוגמה:</u> ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה f_n כך ש

$$\begin{cases} f_n \overset{d_1}{\to} \theta \\ f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta \end{cases}$$

$d_1(f_1,f_2)\coloneqq\int_0^1|f_1(x)-f_2(x)|dx$ $\qquad$ $d_{max}(f_1,f_2)\coloneqq\max_{0\le x\le 1}|f_1(x)-f_2(x)|$.

הסבר:

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב - $C[0,1]$) $\qquad$ $f_n(x)=x^n\,,x\in[0,1]$ $\quad$ $\theta(x)=0$



$$d_1(f_n,\theta)=\int_0^1|f_n(x)-0|dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$f_n\overset{d_1}{\to}\theta \qquad \lim_{n\to\infty}d_1(f_n,\theta)=0$$

מצד שני

$$d_{max}(f_n,\theta) = \max_{0\le x\le 1}|f_n(x) - 0(x)| = \max_{0\le x\le 1} x^n = 1 \nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n,\theta) \nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta$$

תרגיל: באופן דומה לכל $[a,b]$, $a<b$.

<u>הגדרות:</u>

א) נניח d,ρ מטריקות על <u>אותה קבוצה</u> X. אומרים ש – d **דומיננטי ביחס ל – ρ** אם:

$$\boxed{x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a}$$

לכל סדרה $x_n \in X$.

ב) אומרים ש - $d\sim\rho$ **("שקולות")** אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n \overset{d}{\to} a \Leftrightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a}$$

<u>תכונות פשוטות:</u>

1) $d\sim c\cdot d$, $c>0$ קבוע.

2) $\rho \le cd \Leftarrow d$ דומיננטי ביחס ל $\rho -$ (הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ').

3) מטריקת 1-0 (או כל מטריקה עם טופולוגיה דיסקרטית) דומיננטית ביחס לכל מטריקה.

הסבר: כי לגבי מטריקת 1-0 נקבל מרחב דיסקרטי. כל נקודה מבודדת. במרחב כזה יש רק התכנסות קבועה לבסוף. מצד שני כל סדרה שהיא קבועה לבסוף מתכנסת לגבי כל מטריקה על אותה קבוצה.

דוגמה: d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1 בקבוצה $C[a,b]$.

<u>הסבר:</u> מ"ל – $d_1 \le c\cdot d_{max}$.

ש"ל – $\|\cdot\|_1 \le c\cdot\|\cdot\|_{max}$.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b max|f(x)|dx \le \underbrace{(b-a)}_{c>0\ \text{קבוע}}\cdot\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

הוכחנו $\|\cdot\|_1 \le (b-a)\cdot\|\cdot\|_{max}$.

<u>דוגמה:</u> $X := \mathbb{R}^n$. $\boxed{d_{max}\sim d\sim d_1}$

<u>הסבר:</u> $\boxed{d_{max}\le d\le d_1\le n\cdot d_{max}}$

<u>מסקנה:</u> שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

<u>בהמשך נוכיח</u> – הטופולוגיות שוות!

הגדרה חשובה: (טופולוגיה של (X,d))

נגדיר טופולוגיה של מ"פ (X,d) כאוסף של כל תת-קבוצות **פתוחות** ב X. נסמן:

$$\boldsymbol{top(d)} = top(X,d) \coloneqq \{(X,d) \text{ קבוצות פתוחות ב}\}$$

כאשר **"קבוצה פתוחה"** מוגדרת כך:

אומרים ש - $O \subseteq X$ היא פתוחה אם (כל נקודה שלה **פנימית**) מתקיים:

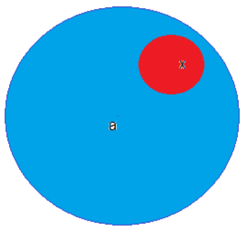
$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

<u>שימו לב:</u> תת קבוצה $A \subseteq X$ **לא פתוחה** ב (X,d) אם"ם <u>קיימת</u> נקודה $a \in A$ כך ש $B(a,\varepsilon)$ לא מוכל ב A לכל $\varepsilon > 0$.

הערה: מכאן ברור למשל $\emptyset \in top(d)$.

<u>משפט:</u> $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X,d) : B_r(a) \in top(d)$.

(ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).



<u>הוכחה:</u> <u>הרעיון:</u> $d(a,x) + r_x < r$.

מכאן ניקח כל מס' r_x כך: $0 < r_x < \underbrace{r - d(a,x)}_{\substack{\text{חיובי} \\ x \in B_r(a) \text{ כי}}}$

נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$.

נניח $y \in B_{r_x}(x)$, צ"ל - $y \in B_r(a)$.

$$d(a,y) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r_x < r$$

$$\Rightarrow d(a,y) < r$$

ז"א $y \in B_r(a)$.

זה קורה עבור כל $x \in B_r(a)$ (ועבור r_x מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.

☺

<u>תוצאה:</u> {כדורים פתוחים} בסיס לטופולוגיה $(top(d))$

$$top(d) \ni O = \cup_{x \in O} B_{\epsilon_x}(x)$$

התנאים הבאים שקולים:

1) $\emptyset \neq O \in top(d)$.

2) $O =$ איחוד של "כדורים פתוחים".

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שלכל $(X, top(d))$ מתקיים:

t_1) $\emptyset, X \in top(d)$

t_2) $O_1, O_2 \in top(d) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in top(d)$ (חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם פתוח)

t_3) $\forall i \in I \quad O_i \in top(d) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in top(d)$ (איחוד של קבוצות פתוחות גם פתוח)

<u>הערה:</u> $\{t_1, t_2, t_3\}$ "אקסיומות של טופולוגיה" על קבוצה X בצורה אבסטרקטית.

הערה: אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff*. על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

<u>משפט (תכונת Hausdorff):</u>

נניח (X, d) **מרחב מטרי**. אז לכל 2 נקודות <u>שונות</u> יש סביבות זרות.

הוכחה: $a \neq b \overset{m_1}{\Rightarrow} d(a,b) > 0$

ניקח $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$.

אז $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$. נבדוק !

אם נניח <u>שלא</u>: $\exists\, x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$

$$\begin{cases} d(a,x) < \epsilon \\ d(b,x) \overset{m_2}{=} d(x,b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר: $d(a,b) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,b) < 2\epsilon$

$\Rightarrow d(a,b) < 2\epsilon$

סתירה לבחירה ☺

<u>משפט (יחידות הגבול):</u> במרחב **מטרי** גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

<u>הוכחה:</u> אם נניח בשלילה $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ $a \neq b$

לפי משפט (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות

$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$

מצד שני, כמעט כל האיברים x_n נמצאים ב - $B_\epsilon(a)$ וגם ב - $B_\epsilon(b)$.

מכאן סתירה ⇐ מש"ל. ☺

דוגמה נגדית (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי $X = (\mathbb{R}^2, \rho_1)$ עם $\rho_1(x,y) \coloneqq |x_1 - y_1|$

ניקח את הסדרה $\forall y \in \mathbb{R}$ $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}, 7\right) \to (1,y)$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

תרגיל: הוכיחו שמרחב פסאו-דומטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

<u>הערה:</u>

ב (X,d) מ"פ, $a \in X$, x_n סדרה. התנאים הבאים שקולים:

1) $\lim_{n\to\infty} d(x_n,a) = 0$ $(d(x_n,a) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0)$.

2) $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, n > N: d(x_n,a) < \epsilon$.

3) בכל ϵ-סביבה של a (ז"א בכל $\mathrm{B}(a,\varepsilon)$) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

4) בכל קבוצה פתוחה O שמכילה את a, כמעט כל האיברים נמצאים ב O.

<u>הגדרה:</u> ת"ק A במרחב (X,d) נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

ז"א אם $A^c \coloneqq X \setminus C \in top(d)$

<u>למשל:</u> $B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק ! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות !)

טענה: איחוד **סופי** של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

תרגיל: הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו: כל תת קבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

תרגיל: הוכיחו שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי = חיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

סדרות קושי ומרחב מטרי שלם

<u>הגדרה:</u> (X,d) מ"מ. סדרה $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי** $(Cauchy)$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

$$i, j \geq n_\epsilon$$

<u>הערה:</u> אם x_n מתכנסת ב X אז x_n סדרת קושי (לבדוק!).

לכן אם סדרה לא ס"ק אז גם לא מתכנסת.

למשל:

$$e_1 = (1,0,0,0\cdots)$$
$$e_2 = (0,1,0,0\cdots)$$
$$e_3 = (0,0,1,0\cdots)$$
$$\cdots$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת כי $\forall i \neq j \quad d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$

<u>הגדרה:</u> מ"מ (X,d) נקרא **שלם** $(Complete)$ אם לכל סדרת קושי x_n ב X יש <u>גבול ב-X.</u>

<u>הגדרה:</u> מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** $(Banach\ space)$ אם $(E, d_{\|\cdot\|})$ <u>שלם</u>.

<u>דוגמאות:</u>

- $(C[a,b], \|.\|_{\max}), (\mathbb{R}^n, \|.\|_{\max}), (\mathbb{R}^n, \|.\|), (\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ מרחבי Banach
- $(C[a,b], \|.\|_1), (C[a,b], \|.\|_2)$ **לא** מרחבי Banach

הערה: $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$

מכפלה פנימית ב - $C[a,b]$ שממנה מקבלים נורמה: $\|f\|_2 \coloneqq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$

הנורמה מגדירה מטריקה d_2 על מרחב הפונקציות $C([a,b])$.

- נגדיר $l_\infty \coloneqq \left\{x = (x_1, x_2, \dots) \middle| \|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\right\}$ מרחב Banach

מרחבה Banach של סדרות **חסומות**.

הכללה: מרחב פונקציות חסומות על קבוצה S

$$l_\infty(S) \coloneqq \{f: S \to \mathbb{R} | \text{חסום ב } \mathbb{R}\ f(S)\}$$

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in S} |f(x)|$$

2 מקרים פרטיים:

1) $S = \mathbb{N}$, אז נקבל את $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$.

2) $S = \{1,2,\dots,n\}$, אז נקבל את $(\mathbb{R}^n, d_{max})$.

דוגמה: $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם !

נניח עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב X **(פרטים בתרגול).**

הערה:

שתי תכונות מאוד חשובות של שלמות:

1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטריקת הצמצום).

2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d). אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגור ב – X.

רמז: תת קבוצה היא סגורה ⇔ היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

פונקציות רציפות

הגדרה (רציפות): נניח (X, d), (Y, ρ) מרחבים. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת **רציפה בנקודה** $\boldsymbol{a \in X}$ אם:

$$\boxed{\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: d(a,x)<\delta \Rightarrow \rho\big(f(a),f(x)\big)<\epsilon}$$

f נקראת **רציפה**, כאשר f רציפה בכל נקודה $a\in X$.

נסמן: $f\in C(X,Y)$. אם $Y=\mathbb{R}$ אז נסמן: $f\in C(X)$.

הגדרה: אומרים ש – f **רציפה במידה שווה (במ"ש)** *uniformly continuous*

אם בבחירה של δ אין תלות ב a. ז"א

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta: d(x_1,x_2)<\delta \Rightarrow \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)<\epsilon$$

$$\boxed{f\in UC(X,Y)}$$

הגדרה: אומרים ש f מקיימת **תנאי ליפשיץ** $(Lipschitz)$ לגבי המקדם $0<c$ אם:

$$\boxed{\forall x_1,x_2\in X: \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)\le c\cdot d(x_1,x_2)}$$

נסמן $\boxed{f\in Lip_c(X,Y)}$ $\boxed{Lip(X,Y)=\bigcup_{c>0}Lip_c(X,Y)}$

תמיד: $\boxed{Lip(X,Y)\subset UC(X,Y)\subset C(X,Y)}$

דוגמאות מאנליזה:

רציפה אבל לא במ"ש $f(x)=x^2\ , f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ $f(x)=\sqrt{x}\ , f:[0,1]\to\mathbb{R}$

הערה: כל שיכון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (**אבל לא ההפך ! תנו דוגמה**).

סימון: אם קיימת איזומטריה, נסמנה $(X,d)\simeq(Y,\rho)$

זהו "יחס שקילות" **באוסף** Metr (מרחבים מטריים).

1) $(X,d)\simeq(X,d)$ (פ' הזהות).

2) $(X,d)\simeq(Y,\rho) \Leftarrow (Y,\rho)\simeq(X,d)$ (פ' הופכית).

3) $\begin{cases}(X_1,d_1)\simeq(X_2,d_2)\\(X_2,d_2)\simeq(X_3,d_3)\end{cases}\Rightarrow (X_1,d_1)\simeq(X_3,d_3)$ (ההרכבה)

דוגמאות:

1) **הזזה** במרחב נורמי $T_v(x) = v + x$ $T_v: E \to E$ תמיד איזומטריה (הוכחנו).

תבדקו ש $T_v(B(0_E, r)) = B(v, r)$. לכן $B(v,r) \simeq B(u,r) \quad \forall u,v \in E$.

2) ($[0,\infty) \xleftarrow{\|\cdot\|} f: E \in Lip_1(E,\mathbb{R})$, כאשר E מרחב נורמי.

הסבר: $\big|\|u\| - \|v\|\big| \underbrace{\leq}_{c=1} \|u - v\|$

3) $f_A: X \to \mathbb{R} \in Lip_1(X,\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י: $f_A(x) = d(x, A)$

הסבר: שימוש באי שוויון חשוב $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

משפט (עיקרון $Heine$): נניח $(Y,\rho), (X,d)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f שומרת על התכנסות (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)

לפני ההוכחה קודם נדון כמה תוצאות.

משפט (השוואת טופולוגיות): נניח ש - d, ρ מטריקות על אותה קבוצה X. אז התנאים הבאים שקולים:

1) $top(\rho) \subseteq top(d)$.

2) d דומיננטי ביחס ל ρ. ז"א $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$

הוכחה: נגדיר את "פונקציית הזהות" $x \mapsto x$ $(X,d) \xrightarrow{id} (X,\rho)$

נשתמש במשפט (עיקרון היינה).

כש - $f = id$, אז $f^{-1}(O) = O$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall O \in top(\rho): O \in top(d)$$

$$\Rightarrow top(\rho) \subseteq top(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

■

תוצאה: התנאים הבאים שקולים:

1) $top(d) = top(\rho)$.

2) $\rho \sim d$.

הסבר: נובע מיד ! שני כיוונים במשפט הקודם.

דוגמה:

1) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad$ $top(d_{max}) = top(d) = top(d_1)$

כי $d_{max} \sim d \sim d_1$

2) $X = C[a,b]$ $(a < b)$ $\quad$ $top(d_1) \subsetneq top(d_{max})$

- (מוכל) כי d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1: $\quad d_1 \leq (b-a)d_{max}$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

- (לא שווה) כעת, יש **הכלה ממש** כי קיימת סדרה f_n ב - $C[a,b]$ $(a < b)$ וגם סדרה f ב - $C[a,b]$ כך ש $\quad f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} f$, $f_n \overset{d_1}{\rightarrow} f$

ראינו דוגמה בהרצאה ב - $[0,1]$.

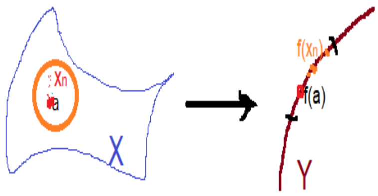
הרצאה 3

<u>משפט (עיקרון $Heine$):</u> נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f:X\to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f <u>שומרת על התכנסות</u> (כלומר, $x_n\xrightarrow{d}a\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{\rho}f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O\in top(\rho): f^{-1}(O)\in top(d)$)



<u>הוכחה:</u>

<u>$(1)\Leftarrow(2)$:</u>

נתון ש $x_n\xrightarrow{d}a$. צ"ל - $f(x_n)\xrightarrow{\rho}f(a)$.

f רציפה $\Leftarrow$ f רציפה בנקודה $a\in X$.

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: f\big(B_\delta(a)\big)\subseteq B_\epsilon\big(f(a)\big)$ (הגדרת $Cauchy$).

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של x_n נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0: x_n\in B_\delta(a)$

אז כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב ϵ- סביבה: $B_\epsilon\big(f(a)\big)$

לכן הוכחנו: $f(x_n)\xrightarrow{\rho}f(a)$.

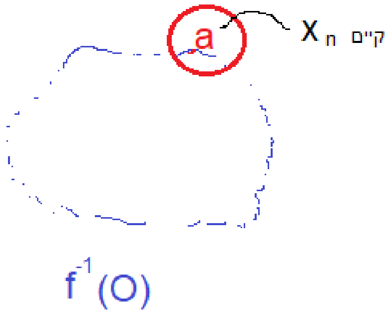
<u>$(2)\Leftarrow(3)$:</u>

נניח בשלילה ש (3) לא מתקיים. ז"א:

$\exists O\in top(\rho): f^{-1}(O)\notin top(d)$

כלומר O פתוחה בעוד ש $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב (X,d).

ז"א קיימת נקודה "<u>לא פנימית</u>" $\exists a\in f^{-1}(O):\forall\epsilon>0\ \ B_\epsilon(a)\nsubseteq f^{-1}(O)$



עבור כל $\epsilon \coloneqq \frac{1}{n}$ קיים $x_n \in X$ כך ש

$$\begin{cases} x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n \notin f^{-1}(O) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(a, x_n) < \frac{1}{n} \\ f(x_n) \notin O \end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ ולכן - $x_n \xrightarrow{d} a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

$f(a) \in O \in top(\rho)$ וכן O פתוחה ולכן $f(a)$ נקודה פנימית ב O.

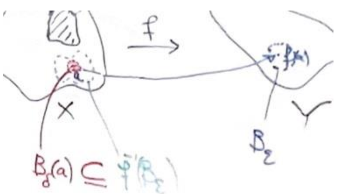
אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B_\epsilon(f(a)) \subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n) \notin O$ ולכן $\forall n: f(x_n) \notin B_\epsilon(f(a))$.

לכן $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

<u>(3) ⇐ (1):</u>

בודקים את (1) -- רציפות "דרך כדורים".



לכל $\epsilon > 0$ נתון – $O = B_\epsilon(f(a)) \in top(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) $f^{-1}(O) = f^{-1}\left(B_\epsilon(f(a))\right) \in top(d)$ גם פתוח.

אכן $a \in f^{-1}(O)$, ולכן a נקודה פנימית, אז קיים $\delta > 0$ כך ש –

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f(B_\delta(a)) \subseteq f(f^{-1}(O)) \subseteq O = B_\epsilon(f(a))$$

<u>הערה:</u> במשפט עקרון $Heine$ (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.

<u>הסבר מקוצר:</u> $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$

A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

ולכן $(4) \Leftrightarrow (3)$.

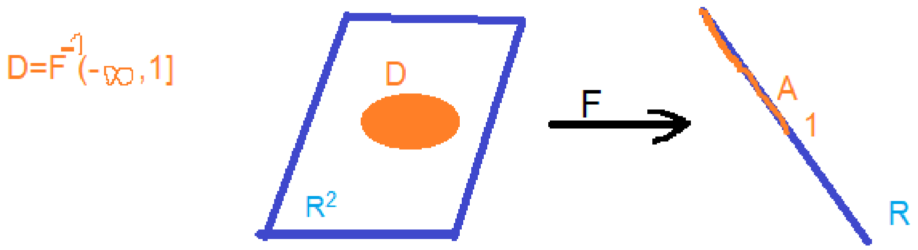
☺

<u>דוגמאות:</u>

1) $D \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$ סגור ב - $\mathbb{R}^2$.

<u>הסבר:</u> $F(x,y) \coloneqq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ $\quad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

רציפה (פונקציה פולינומיאלית!).



2) כל מישור ב - $\mathbb{R}^3$ סגור. למשל

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \underbrace{2x + 3y - 4z + 5}_{F(x,y,z)} = 0\right\}$$

סגור, כי את D ניתן לכתוב כ $D = F^{-1}(0)$ ואז $\{0\}$ סגור ב - $\mathbb{R}$.

3) בכל מ"מ (X,d): $\quad B_r[a] \quad S_r(a)$ סגורות.

<u>הסבר:</u>

נגדיר פו' $f_a: X \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = d(a,x)$. זוהי פונקציית ליפשיץ – $f_a \in Lip_1 \subset C(X)$.

$$f_a^{-1}(-\infty, r] = B_r[a] \coloneqq \{x \in X | d(a,x) \le r\}$$

גם סגור!

4) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ מטריצות הפיכות, <u>פתוחה</u> במרחב של מטריצות ריבועיות.

$$Gl_n(\mathbb{R}) \subset Mat_n(\mathbb{R}) \overset{metr}{\simeq} \mathbb{R}^{n^2}$$

הגדרות: (X,d) מ"מ, $A\subseteq X$.

א) **"הסגור של A"** $(Closure\ of\ A)$:

$$A\underbrace{\subseteq}_{m_1}\bar{A}=cl(A):=\{x\in X|\ d(x,A)=0\}$$

ב) **"סגור סדרתי"** $(sequential\ closure)$:

$$A\underbrace{\subseteq}_{\substack{\text{סדרה קבועה}\\ \text{תמיד מתכנסת!}}} scl(A):=\left\{x\in X\middle|\exists a_n\in A: x=\lim_{n\to\infty}a_n\right\}$$

משפט 1: בכל <u>מ"מ</u> תמיד $\boxed{scl(A)=cl(A)}$.

הוכחה: $(\subseteq)$: נניח $z\in scl(A)$ אז

$$\begin{cases}\exists a_n\in A\\ z=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\end{cases}$$

$$d(z,a_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\Rightarrow d(z,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}})=0$$

$$0\le d(z,A)\le d(z,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}})\Rightarrow d(z,A)=0$$

$$\Rightarrow z\in cl(A)$$

$(\supseteq)$:

$$z\in cl(A)$$

$$\Rightarrow \inf_{a\in A}d(z,a)=d(z,A)=0$$

(לפי הגדרת inf) נקבל שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $a_n\in A$ כך ש

$$\forall n\in\mathbb{N}: 0\le d(z,a_n)\le\frac{1}{\underbrace{n}_{\to 0}}$$

מכאן $a_n\in A\ \wedge \lim\limits_{n\to\infty}a_n=z\in scl(A)$

☺

משפט 2 (קריטריון סגירות במ"מ): נניח (X,d) מ"מ, $A\subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

1) A סגורה ב X (ז"א משלים לפתוחה).

2) $A=scl(A)$ (A סגורה לגבי הגבולות).

3) $A=cl(A)$.

4) A "קבוצת אפסים" של פונ' רציפה (ז"א קיימת פ' רציפה $X\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ כך ש - $A=f^{-1}(0)$).

הוכחה:

<u>(1) ⇐ (2):</u>

נניח בשלילה ש - $A \neq scl(A)$.

אז (בגלל ש - $A \subseteq scl(A)$) קיימת נק' –

$$\begin{cases} z \in scl(A) \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \in A^c \end{cases}$$

A סגורה (נתון). ז"א A^c <u>פתוחה</u>!

ואז z נקודה פנימית של A^c.

$$\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq A^c$$

אז אף איבר של הסדרה a_n לא נמצה בכדור $B_r(z)$ וזאת סתירה ל –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \\ a_n \in A \end{cases}$$

(2) ⇐ (3): בגלל משפט 1.

<u>(3) ⇐ (4):</u>

נגדיר $f_A : X \to \mathbb{R}$ (רציפה !) $f_A(x) = d(x, A)$

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | f_A(x) = 0\} = \{x \in X | d(x, A) = 0\} = cl(A) \underbrace{=}_{\text{נתון 3}} A$$

ולכן $f_A^{-1}(0) = A$.

<u>(4) ⇐ (1):</u>נפעיל "תוספת למשפט $Heine$" (מקור לסגור גם סגור) $f^{-1}(0)$ מקור של נקודון.

☺

<u>הגדרה:</u> במ"מ (X, d) עבור $A \subseteq X$, נגדיר

$$A' := \{x \in X | x \in cl(A \backslash \{x\})\} \overset{metr}{=} \{x \in X | x \in scl(A \backslash \{x\})\} \subset cl(A)$$

נקודות ההצטברות של A.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו ש $z \in A'$ אם ורק אם קיימת סדרה ב A **עם איברים שונים** שמתכנסת ב X לנקודה z.

<u>רמז:</u> ראו בהרצאה 1 משפט (על נקודה מבודדת) הוכחה של כיוון שני. תשתמשו בעובדה ש

$d(z, A\backslash\{z\}) = 0$ על מנת לבנות סדרה מבוקשת (במקום העובדה בטענה ש z לא מבודדת).

דוגמאות:

1) $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$.

$$A' = \{0\}$$

$$A'' = \emptyset$$

2) $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \middle| n, m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.

$$A' = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(0, \frac{1}{m}\right)\right\}$$

$$A'' = \{(0,0)\}$$

$$A''' = \emptyset$$

3) $A=[0,1] \subset \mathbb{R}$

אז

$$A' = A$$

תכונות (במ"מ): (בתירגול או לבדוק לבד!).

א) $cl(A) = A \cup A'$.

ב) A סגורה $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

הגדרה: אומרים שתת קבוצה A ב- X היא:

א) **"קבוצה G_δ"** אם A שווה לחיתוך **בן מנייה** של קבוצות פתוחות.

(ז"א $\exists O_n \in top(d), n \in \mathbb{N}: A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$).

ב) **"קבוצה F_σ"** אם A שווה לאיחוד **בן מנייה** של קבוצות סגורות.

(ז"א $\exists P_n \subseteq X: A = \bigcup_{n\in N} P_n$, P_n סגורה $\forall n$).

הערה: $A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma$

למשל: כל נקודון **קבוצה G_δ** וגם **F_σ** **(מדוע ?)** בכל מ"מ

תרגיל:

"בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמרחב מטרי (X, d):

א) כל קבוצה סגורה היא G_δ.

ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ

הגדרה: A נקראת קבוצה **סגוחה** (clopen) אם $\begin{cases} A \text{ פתוחה} \\ A \text{ סגורה} \end{cases}$

דוגמאות:

1) $A=(0,1)$ פתוחה ולא סגורה ב $X=\mathbb{R}$.

2) $A=[0,1]$ סגורה ולא פתוחה ב $X=\mathbb{R}$.

3) $A=[0,1)$ לא סגורה ולא פתוחה ב $X=\mathbb{R}$.

4) $\emptyset,\mathbb{R}$ סגוחות ב - $\mathbb{R}$.

הערה: לכל מרחב (X,d) – תת קבוצות $\emptyset,X$ תמיד סגוחות (כי $X=\emptyset^c$, $\emptyset=X^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

הגדרה: מרחב (X,d) נקרא **קשיר** (*connected*) אם קבוצות סגוחות במרחב הן **רק** $\emptyset,X$.

הגדרה שקולה להיות **לא קשיר**: אם קיים פירוק $X=X_1\uplus X_2$ כך ש –

$$\begin{cases} X_1\neq\emptyset\,,X_2\neq\emptyset \\ X_1,X_2\in top(d)\ (\text{פתוחות}) \\ X_1\cap X_2=\emptyset \end{cases}$$

(שימו לב ש X_1,X_2 <u>סגוחות</u> לא טריוויאליות)

למשל: אם: $\underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}}=[2,4)\cup(5,\infty)\quad \mathbb{R}\supset$

אז X **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ **סגוחה** ב X (לא ב $\mathbb{R}$).

דומה עבור $[2,4)$ (למשל 2 נק' פנימית ב $[2,4)$ כי $B_{\frac{1}{2}}(2)=[2,2.5)\subseteq[2,4)$).

עוד דוגמה: מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$\mathbb{R}\supset\mathbb{Q}$$

$$X_1=(-\infty,\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$$

$$X_2=\mathbb{Q}\cap(\sqrt{2},\infty)$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z},d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) כל כדור פתוח קבוצה סגוחה.

הסיקו ש $(\mathbb{Z},d_p)$ לא קשיר.

משפט: (*תכונות בסיסיות של מרחב מטרי שלם*)

1. שלמות נשמרת בקבוצות סגורות

(אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלם כתת מ"מ).

2. נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d). אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגורה ב X.

הוכחה: בתירגול

השלמה של מרחב מטרי

הגדרה: **השלמה** של מ"מ (X, d) הוא

שיכון איזומטרי $M \overset{i}{\hookrightarrow} (X, d)$, כאשר M **מ"מ שלם** ומתקיים: $cl(i(X)) = M$.

הערה:

קל לבדוק שהסגור $cl(A)$ של A בכל מרחב הוא תמיד קבוצה סגורה.

(וזה נכון אפילו למרחבים טופולוגיים, נוכיח בהמשך)

משפט (שיכון למרחב $\boldsymbol{Banach}$): לכל מ"מ (X, d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב Banach.

הוכחה: למדנו על מרחב $Banach \ni (l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup})$.

$$l_\infty(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid \text{חסומה } f(X)\}$$

$$\|f\|_{sup} \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)|$$

נראה כי ניתן לשכן את X לתוך $l_\infty(X)$:

נבחר $z \in X$. ונגדיר – $\varphi: X \to l_\infty(X)$

$$a \mapsto \varphi(a) = \hat{a} \qquad \hat{a}: X \to \mathbb{R} \quad \boxed{\hat{a}(x) = d(a, x) - d(z, x)}$$

$\hat{a} \in l_\infty(X)$, ז"א $\hat{a}$ פונקציה חסומה כי

$$|\hat{a}(x)| = |d(a, x) - d(z, x)| \le \underbrace{d(a, z)}_{\text{קבוע}}$$

מ"ל $\forall a, b \in X$: $\boxed{d(a, b) = \|\hat{a} - \hat{b}\|}$.

$$\|\hat{a} - \hat{b}\| = \sup_{x \in X} \left| \big(d(a, x) - d(z, x)\big) - \big(d(b, x) - d(z, x)\big) \right| =$$

$$= \sup_{x \in X} |d(a, x) - d(b, x)| \le d(a, b)$$

מצד שני, אם נציב $x = b$ נקבל

$$\|\hat{a} - \hat{b}\| = \sup_{x \in X} |d(a, x) - d(b, x)| \ge \quad |d(a, b) - 0| = d(a, b)$$

☺

הרצאה 4

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X,d) יש השלמה.

הסבר ב 2 דרכים:

דרך I: הוכחנו שלכל (X,d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$

$$\varphi: X \to l_\infty(X)$$

$l_\infty(X)$ פונקציות חסומות וממשיות. ($\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right)$ מרחב $Banach$).

$$\overline{\varphi(X)} \subset l_\infty(X)$$

קבוצה סגורה במרחב שלם ולכן גם שלם.

אז קיבלנו השלמה $X \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \overline{\varphi(X)} = cl(\varphi(X))$

☺

דרך II: "דרך סדרות קושי" (הוכחה מקוצרת - רק שלבים בסיסיים). הוכחה מפורטת אפשר למצוא למשל בספר "טופולוגיה קבוצתית",ד. ליבוביץ (האוניברסיטה הפתוחה) חלק א.

הרעיון מאוד דומה להשלמה $\mathbb{Q} \overset{i}{\hookrightarrow} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ של מרחב רציונליים. כשאנחנו מגדירים מספר ממשי כמחלקת שקילות של סדרות קושי ברציונליים.

שלב א': עבור מ"מ נתון (X,d) נגדיר קבוצה – $\tilde{X} := \{(X,d)$ סדרות קושי ב$\}$

נגדיר פסאודו-מטריקה באופן טבעי: לכל זוג של ס"ק $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$

נגדיר $\tilde{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$

הגבול קיים כי מדובר על סדרות קושי וקל לבדוק ש $d(x_n,y_n)$ ס"ק ב $\mathbb{R}$

(רמז: שימו לב $|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)| \le d(x_n,x_m)+d(y_m,y_n)$).

לכן הסדרה $d(x_n,y_n)$ באמת מתכנסת ב $\mathbb{R}$ כי $\mathbb{R}$ שלם.

$(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי.

שלב ב':

<u>טענת עזר</u>: (*מרחב מטרי מושרה ע"י מרחב פסאודו-מטרי*)

נניח $(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי (כללי).

יוצרים ממנו מרחב מטרי מנה שמקבלים באופן הבא.

על מרחב פסאודו-מטרי $(\tilde{X},\tilde{d})$ מגדירים יחס שקילות ("מרחק אפס"):

$$x\Omega y \overset{def}{=} \tilde{d}(x,y)=0$$

נקבל קבוצת מנה: $M\coloneqq \tilde{X}/\Omega=\{[x] \text{ מחלקות שקילות}\}$

$$[x]\coloneqq\{y\in\tilde{X}|\tilde{d}(x,y)=0\}$$

נגדיר ב M מרחק טבעי (דרך הנציגים): $\bar{d}([x],[y])=\tilde{d}(x,y)$.

אין תלות בנציגים וזאת באמת מטריקה. אז: $(\mathrm{M},\bar{d})$ מרחב מטרי,

הפונקציה $(\tilde{X},\tilde{d})\to(\mathrm{M},\bar{d}),\ x\mapsto[x]$ היא על ושומרת מרחקים.

נחזור למשפט. נפעיל "טענת עזר" על מרחב פסאודו-מטרי שלנו $(\tilde{X},\tilde{d})$ של ס"ק.

נגדיר שיכון: $x\longmapsto[\tilde{x}] \qquad X\overset{i}{\hookrightarrow}M$

כאשר $\tilde{x}\in\tilde{X}$ סדרה קבועה $x,x,x\ldots$. אז מתקיימים תנאים הבאים:

i שיכון איזומטרי.

$$d(x,y)=\bar{d}([\tilde{x}],[\tilde{y}])$$

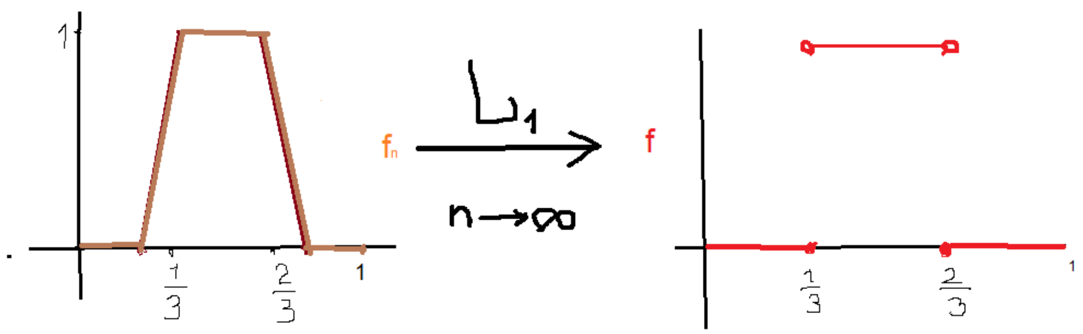
$$\overline{\iota(X)}=M$$

(M,ρ) מרחב שלם. ☺

<u>דוגמה 1</u>: $\mathbb{Q}^n\hookrightarrow\mathbb{R}^n=\overline{\mathbb{Q}^n}$.

<u>דוגמה 2</u>: $L_1[a,b]\ \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow}\ (C[a,b],d_1)$, כאשר $L_1[a,b]$ פונקציות אינטגרביליות.

$(C[a,b],d_1)$ לא שלם!



(f_n) ס"ק ב - $(C[a,b],d_1)$ אבל לא מתכנסת ב - $(C[a,b],d_1)$.

כן מתכנס במרחב (גדול יותר) $L_1[a,b]$:

כאשר: $E=\left\{f \,\middle|\, \int_a^b |f|dx=0\right\}$.

$\widetilde{L_1}$ מרחב פסאודו-נורמי ! (אומרים יותר: סמי-נורמי). $L_1[a,b]=\widetilde{L_1}/E$ מרחב המנה והוא מרחב בנך של פונקציות אינטגרביליות על $[a,b]$.

3) $L_2[a,b] \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow} (C[a,b],d_2)$. מקבלים מרחב הילברט פונקציונלי.

<u>**תזכורת:**</u> $X=(\mathbb{Z},d_p)$ מ"מ לא שלם! (היה בתירגול)

למשל עבור $p=3$: $x_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$

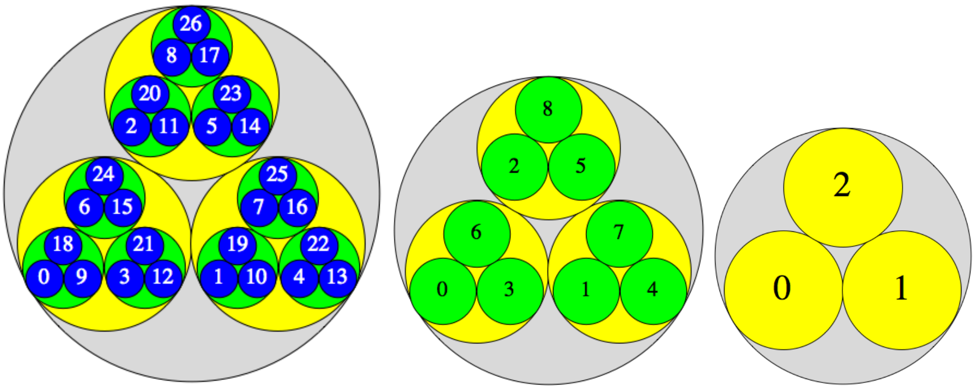
סדרת קושי שלא מתכנסת ב X.

דוגמה 4: $(\mathbb{Z},d_p)\hookrightarrow(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_p})$ כאשר: השלמה היא

$$\overline{\mathbb{Z}}=\{\text{שלמים } p-\text{אדיים}\}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k \,,\, b_k\in\underbrace{\{0,1,\dots,p-1\}}_{\text{שאריות מודולו } p}=\mathbb{Z}_p\right\}$$

שהוא קומפקטי (ולכן גם שלם) ! בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

<u>**שאלה**</u>: כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה של $(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_3})$ לפי התמונות הבאות ?



....

מרחבים טופולוגיים

הגדרה: תהי X קבוצה לא ריקה. אוסף תת הקבוצות $\tau \subseteq P(X) := \{A | A \subseteq X\}$ נקרא **טופולוגיה על קבוצה X** אם מתקיימים התנאים הבאים:

t_1) $\emptyset, X \in \tau$.

t_2) (חיתוכים סופיים) $O_i \in \tau$ עבור $i \in \{1,2,\dots,n\}$ $\Leftarrow$ $O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n \in \tau$

(מספיק עבור $n = 2$).

t_3) (איחודים) $O_i \in \tau$ עבור $i \in I$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.

אם מתקיימים הנ"ל, אז נאמר ש - (X, τ) הוא **מרחב טופולוגי** $(Topological\ space)$ ונרשום בקיצור מ"ט.

הגדרות נוספות:

א) אומרים ש - $A \subseteq X$ היא תת קבוצה **פתוחה** (במ"ט (X, τ)) אם

$$\boxed{A \text{ פתוחה} \overset{def}{=} A \in \tau}$$

ב) תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת קב' **סגורה** (במ"ט (X, τ)) אם המשלים קבוצה פתוחה, ז"א

$$\boxed{A \text{ סגורה} \overset{def}{=} A^c \text{ פתוחה}}$$

דוגמאות:

1) לכל מרחב פסאודו-מטרי (X, d): $\big(X, top(d)\big)$ מרחב טופולוגי (לבדוק!).

כאשר $top(d) = \{\text{קבוצות פתוחות במובן } d\}$.

הגדרה: אומרים שמ"ט (X, τ) הוא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה d כך ש $\boxed{\tau = top(d)}$

באופן דומה אפשר להגדיר: מרחב טופולוגי **פסאודו-מטריזבילי**

משפט (תכונות בסיסיות של קבוצות סגורות): לכל מ"ט (X, τ) מתקיים:

t_1^c) $X, \emptyset$ סגורות.

t_2^c) איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור.

t_3^c) כל חיתוך קב' סגורות שוב סגור.

הוכחה: כללי $de\ Morgan \wedge$ הגדרת TOP.

הגדרה: **קבוצה סגוחה** = סגורה+פתוחה.

2) "טופולוגיה טריוויאלית": $\tau_{tr} := \{\emptyset, X\}$. (X, τ_{tr}) **מרחב טריוויאלי**.

הערה: מ"ט (X, τ_{tr}) תמיד פסאודו-מטריזבילי: כי $\tau_{tr} = top(d_0)$. כאשר $d_0(x,y) = 0$.

3) "**טופולוגיה דיסקרטית**": $\tau_{discr} := P(X) = \{X - \text{תת קבוצות ב}\}$

(כאן כל תת קבוצה היא פתוחה, בעצם סגוחה)

שימו לב: בין היתר, כל נקודון $\{x\}$ קבוצה פתוחה (שקול לדיסקרטיות בגלל t_3).

הגדרה: נקודה a במרחב טופולוגי (X, τ) נקראת **מבודדת** $(isolated)$ אם $\{a\} \in \tau$

(נקודון פתוח!).

לכן: מרחב טופולוגי הוא דיסקרטי $\Leftrightarrow$ כל נקודה מבודדת בו.

הערה: מרחב דיסקרטי הוא תמיד מטריזבילי. $\tau_{discr} = top(d_\Delta)$ (d_Δ מטריקת 1-0).

הערה: לכל טופולוגיה τ מתקיים: $\{\emptyset, X\} = \tau_{tr} \subseteq \tau \subseteq \tau_{discr} = P(X)$

הגדרה: נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 2 טופולוגיות על אותה קבוצה X. אז אומרים ש - τ_2 **חזקה** יותר מ - τ_1, ואומרים ש - τ_1 **חלשה** יותר מ - τ_2.

4) $X = \{0,1\}$ ונגדיר – $\tau_* := \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ טופולוגית Sierpinski

$\{0\}$ מבודדת, $\{1\}$ לא. מה הן קבוצות סגורות ? סגוחות ?

הגדרה (תת מרחב טופולוגי): יהי $(X, \tau) \in TOP$, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

מגדירים **טופולוגית תת מרחב** מעל Y: $\tau_Y := \{ O \cap Y | O \in \tau\}$

תבדקו ש $(Y, \tau_Y) \in TOP$

הערה: $\{metric\ spaces\} = Metr \to TOP = \{topological\ spaces\}, (X,d) \mapsto (X, top(d))$

א) לא על.

ב) לא חח"ע.

הסבר ב': (שקילות טופולוגית של מטריקות)

הסבר א': שקול להגיד: שלא כל מ"ט הוא מטריזבילי.

דוגמה:

- מ"ט טריוויאלי (X,τ_{tr}) עם X לא נקודון--- לא מטריזבילי (אבל פסאודו-מטריזבילי).
- $X \coloneqq \{0,1\}$. (X,τ_*) מ"ט אבל לא מטריזבילי (אפילו לא פסאודו-מטריזבילי!).

$$\tau_* = \left\{\underbrace{\emptyset,\{0\},\{0,1\}}_{\text{פתוחות}}\right\}. \qquad \left\{\underbrace{\{0,1\},\{1\},\emptyset}_{\text{סגורות}}\right\}$$

<u>הסבר:</u>

<u>הסבר קצר שהמרחב לא מטריזבילי:</u> $(\{0,1\},\tau_*) \notin Metriz$

נקודון $\{0\}$ לא קבוצה סגורה! מצד שני, בכל מ"מ, כל נקודון סגור!

נוכיח יותר: ש - $(\{0,1\},\tau_*)$ לא פסאודו-מטריזבילי. נניח בשלילה שכן ...

נניח בשלילה שיש פסאודו-מטריקה ρ על $\{0,1\}$ כך ש – $top(\rho) = \tau_*$.

<u>2 מקרים:</u>

1) $\rho(0,1) = 0$ ואז $\rho = d_0$. מצד שני, $top(d_0) = \{\emptyset,\{0,1\}\} \neq \tau_*$.

2) $\rho(0,1) > 0$. כאן – $top(\rho) = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\} \subsetneq \tau_*$

כי כל הנק' מבודדות ולכן המרחב הוא דיסקרטי.

5) "טופולוגיה קו-סופית":

לכל קב' $X \neq \emptyset$ נגדיר – $\tau_{cof} \coloneqq \{F^c : \text{סופית } F \subseteq X\} \cup \{\emptyset\}$

שאלה: מה הן קבוצות סגורות ? סגוחות ?

לבדוק: (X,τ_{cof}) מ"ט אבל לא תמיד מטריזבילי (תלוי בעוצמה של X).

$$(\mathbb{R},\tau_{cof}) = \{F^c \subseteq \mathbb{R} | \text{סופית } F \subset \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \notin Metriz$$

<u>רמז:</u> לנקודות שונות אין "סביבות" פתוחות זרות.

הגדרות:

יהי (X,τ) מ"ט.

1) תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה לנק' $a \in X$** אם קיימת קבוצה פתוחה O ($\in \tau$)

כך ש $a \in O \subseteq V$.

נסמן $V \in N(a)$, כאשר $N(a)$ סביבות של a.

אומרים **סביבה פתוחה** אם V פתוחה.

<u>אזהרה:</u> <u>סביבה</u> לא חייבת להיות פתוחה.

2) באופן דומה נגדיר **סביבה V לתת קבוצה $S \subseteq X$** אם

$$\exists O \in \tau: \quad S \subseteq O \subseteq V$$

נסמן $V \in N(S)$, כאשר $N(aS)$ סביבות של A.

3) אומרים שנקודה a היא **נק' פנימית** של קבוצה $A \subseteq X$ אם $A \in N(a)$.

הסימון: $a \in int(A)$ או $a \in A^{\circ}$.

בעצם זה מגדיר את ה"פנים" של A: $int(A)$ (כאוסף של נקודות פנימיות).

__הערה:__ תמיד $int(A) \subseteq A$.

__טענה:__ $int(A) = A \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{קריטריון לפתיחות}} A$ פתוחה $(A \in \tau)$.

הסבר: שימוש ב t_3 $\quad A = \bigcup_{a \in A} O_a \in \tau \quad \ldots$

הערה חשובה: הרבה הגדרות במ"ט מתקבלות מהגדרות על מ"מ כשמחליפים ε-סביבות בסביבות. למשל: התכנסות סדרות, רציפות פונקציות, ...

__הגדרה:__ **התכנסות סדרות**

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} X \quad n \longmapsto f(n) = x_n$$

לסדרה x_n במ"ט (X, τ) מגדירים גבול (אם קיים!) באופן הבא:

אומרים ש - $a \in X$ **גבול** של סדרה $x_n \in X$ אם לכל סביבה (פתוחה) U של a כמעט כל האיברים נמצאים בסביבה U. ז"א

$$\forall U \in N(a) \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U \qquad (n_0 \text{ תלוי בסביבה } U)$$

__סימון:__ $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ או $x_n \xrightarrow{\tau} a$.

__הגדרה:__ **רציפות פונקציות**

נייח $(X, \tau), (Y, \sigma)$ מ"ט. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת *רציפה בנקודה* $a \in X$ אם:

$$\forall U \in N(f(a)) \quad \exists V \in N(a) \quad f(V) \subseteq U$$

אומרים *רציפה* אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$. סימון: $f \in C(X, Y)$.

__הערה:__ (כמו במ"מ) פונקציה $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ בין 2 מ"ט **רציפה** אם"ם

$$\boxed{\forall O \in \sigma : f^{-1}(O) \in \tau}$$

ז"א מקור לפתוח הוא פתוח (ניתן לנסח עבור סגור).

תרגיל: הוכיחו ש $f : X \to Y$ רציפה בכל נקודה $a \in X$ אם"ם $f^{-1}(O) \in \tau \quad \forall O \in \sigma$.

<u>הגדרה:</u> X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2), כלומר: $X \in T_2$

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

<u>משפט:</u> (יחידות הגבול) במרחב טופולוגי (X,τ) עם תכונה T_2 $(Hausdorff)$, גבול של סדרה תמיד יחיד, אם קיים.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה ש $\begin{cases} a \neq b \\ X \in T_2 \end{cases}$

$\Leftarrow$ קיימות <u>סביבות זרות</u> $U \in N(a), V \in N(b)$ כך ש - $U \cap V = \emptyset$.

U מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n, <u>וגם</u> V מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה ...

סתירה! ☺

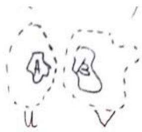
<u>אקסיומות הפרדה נוספות</u>:

<u>הגדרות:</u> נניח $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. אומרים:

א) קיימת **הפרדה סביבתית** של A, B (במ"ט (X,τ)) אם

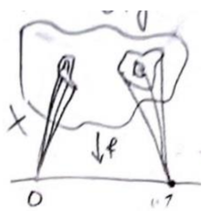
$$\exists\, U \in N(A), V \in N(B) : U \cap V = \emptyset$$

(ז"א אם קיימות סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות).



ב) קיימת **הפרדה פונקציונלית** במובן $Urysohn$ אם:

$$\exists f \in C(X,[0,1]) : f(A) = 0, f(B) = 1$$



<u>טענה:</u> מהפרדה פונקציונלית נובעת מהפרדה סביבתית.

<u>הוכחה:</u> ניקח סביבות פתוחות זרות של $0,1$ ב - $[0,1]$.

$$\underbrace{U := \left[0, \frac{1}{3}\right)}_{0\in} \cap \underbrace{V := \left(\frac{2}{3}, 1\right]}_{1\in} = \emptyset$$

$$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in N(A)} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in N(B)} = \emptyset$$

ומצאנו הפרדה סביבתית של A, B. ☺

הגדרה: X מקיימת **תכונת T_0**, כלומר: $(X,\tau) \in T_0$ $(Kolmogorov)$ – אם לכל 2 נקודות שונות $a \neq b$ מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

1) $\exists U \in N(a): b \notin U$

או

2) $\exists V \in N(B): a \notin V$

הגדרה: X מקיימת **תכונת T_1**,

כלומר: $X \in T_1$ אם מתקיימים שתי התנאים מקודם ((1) **וגם** (2)).

תרגיל: התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in T_1$

2) כל נקודון סגור.

3) כל תת קבוצה סופית F היא סגורה. (רמז: (t_2^c))

הערה: תמיד $(X, \tau_{cof}) \in T_1$, בעצם τ_{cof} טופולוגיה הכי קטנה על X שמקיימת את תכונה T_1.

הגדרה (תזכורת): X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2),

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

הגדרה: X מקיימת **תכונת T_3**, כלומר: $X \in T_3$, אם מתקיימים שני תנאים:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה B $a \notin B$ יש הפרדה סביבתית. רמז: ניקח נקודון $B := \{b\}$

אומרים גם: $Regular\ spaces = T_3$ (ולעיתים רק תנאי $Regular = T_3($ב$)$)

הערה: $T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$

הגדרה: X מקיימת **תכונת $T_{3\frac{1}{2}}$**, כלומר: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, אם:

(א) $X \in T_1$.

^{f}(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה $a \notin B$ קיימת הפרדה פונקציונלית.

__הערות:__

- מהטענה $\Leftarrow$ $T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}}$.
- $T_{3\frac{1}{2}}$ אומרים גם תכונת Tychonoff או *רגולרי לחלוטין*

(לעיתים רק על $T_{3\frac{1}{2}}(\text{ב})^f$ אומרים – Completely Regular = רגולרי לחלוטין).

__הגדרה:__ X מקיימת **תכונת T_4**, כלומר: $X \in T_4$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל 2 קבוצות סגורות וזרות $A \cap B = \emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

(כלומר $\exists\, U \in N(A), \exists\, V \in N(B): U \cap V = \emptyset$).

__הערות:__

- לעיתים אומרים $Normal\ Space$ = מרחב נורמלי.

(ולעיתים אומרים נורמלי על $T_4(\text{ב})$ בלבד)

- לא קל להבין מדוע $X \in T_4 \Rightarrow X \in T_{3\frac{1}{2}}$

נובע מהמשפט הבא:

__משפט $Urysohn$:__ יהי $X \in T_4$. אז לכל זוג A, B קבוצות __סגורות__ __זרות__ קיימת הפרדה פונקציונלית של A, B.

החלק הלא טריוויאלי בהוכחה נובע מ $"Onion\ Argument"\ of\ Urysohn$.

$$TOP \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \supset T_4 \supset Metriz$$

Spoiler : בהמשך נוכיח $T_4 \supset Metriz$, $T_4 \supset Comp \cap T_2$, וגם את משפט Urysohn.

__הערה:__ לכל ההכלות הנ"ל, יש דוגמאות נגדיות (הן הכלות **ממש**).

ראו קובץ באתר של המרצה – some examples

1) $(\{0,1\}, \tau_{tr}) \in Top$
$(\{0,1\}, \tau_{tr}) \notin T_0$

2) $(\{0,1\}, \tau_*) \in T_0$ (כי $1 \notin \{0\} \in N(0)$)

$(\{0,1\}, \tau_*) \notin T_1$ (כי $\{0\}$ לא סגור)

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \in T_1$ (כל נקודון $\{a\}$ סגור כי $X \setminus \{a\} \in \tau_{cof}$)

$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \notin T_2$

תזכורת: $\tau_{cof} := \left\{F^c \middle| F \subseteq \mathbb{R} \text{ סופית} \right\} \cup \{\emptyset\}$

הערה: $(X,\tau_{cof}) \notin T_2$ לכל X <u>אינסופית</u>.

בעצם זה לכל 2 קבוצות פתוחות לא ריקות.

$U,V \in \tau_{cof}$ מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$ כי $U := F_1^c, V := F_2^c$

ולכן $U \cap V = F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c \underbrace{=}_{\text{אם נניח}} \emptyset$

אז $X = \underbrace{F_1 \cup F_2}_{\text{סופית}}$

בסתירה! ☺

הגדרה: הסגור - ***closure***: עבור $A \subseteq X$ נגדיר

$$z \in cl(A) = \bar{A} \overset{def}{=} \forall V \in N(z): V \cap A \neq \emptyset$$

$cl(A)$ "הנקודות הכי קרובות" ל A.

הערה: תמיד $A \subseteq cl(A)$.

תרגיל: $A = cl(A) \Leftrightarrow A$ סגורה.

הגדרה: $A \subseteq X$. נגדיר את **הסגור הסדרתי** לפי:

$$z \in scl(A) \overset{def}{=} \exists a_n \in A: a_n \xrightarrow{\tau} z$$

טענה: במ"ט תמיד $A \subseteq scl(A) \subseteq cl(A)$.

הוכחה: הכלה ראשונה נובעת מזה שסדרות קבועות תמיד מתכנסות.
נניח $z \in scl(A)$. אז קיימת סדרה $a_n \in A$ שמתכנסת (במרחב X) ל z.
לכל סביבה $U \in N(z)$ כמעט כל האיברים של a_n נמצאים ב U. אז ברור $U \cap A \neq \emptyset$
לכן $z \in cl(A)$. זה מוכיח $scl(A) \subseteq cl(A)$.
☺

הרצאה 5

שאלה: א. למצוא מ"ט (X,τ) שבו **לא תמיד** $scl(A)=cl(A)$

(ואז (X,τ) לא מטריזבילי).

ב. אותה שאלה אבל בתנאי נוסף ש $(X,\tau)\in T_2$.

דוגמה א: $(\mathbb{R},\tau_{coc})$ $\tau_{coc}:=\{Y^c\subseteq\mathbb{R}:|Y|\le\aleph_0\}\cup\{\varnothing\}$

$[0,1]=scl([0,1])\ne cl([0,1])=\mathbb{R}$.

דוגמה ב: נגדיר $X:=\mathbb{R}\cup\{p\},\ p\notin$

$$\tau:=\{O\subseteq X\,|\,p\in O\Rightarrow|O^c|\le\aleph_0\}$$

ז"א אם $p\in O$, אז המשלים O^c הוא בן מנייה. נשים לב ש - $\forall x\ne p:\{x\}\in\tau$.

לבדוק:

- $(X,\tau)\in TOP$. לבדוק גם T_2.
- τ לא דיסקרטית (נק' p לא מבודדת).
- תת מרחב טופולוגי $Y:=(\mathbb{R},\tau_Y)$ של מ"ט הנ"ל
  הוא $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה <u>דיסקרטית</u>. ז"א $\tau_Y=P(\mathbb{R})=\tau_{discr}$.
- לבדוק $\mathbb{R}=scl(\mathbb{R})\ne cl(\mathbb{R})=X$
- אם סדרה a_n מתכנסת ב (X,τ) אז היא קבועה לבסוף
- $id:(X,\tau)\to(X,\tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה !
- **מסקנה: עיקרון $Heine$ כאן לא מתקיים!**
- $(X,\tau)\notin Metriz$.

תכונות $(int, cl$, ∂, סביבות): במ"ט (X,τ)

1) $\forall\, a \in X: X \in N(a)$ (רמז: t_1).

2) חיתוך **סופי** של סביבות (פתוחות) גם סביבה (פתוחה). רמז: t_2.

3) $V \in N(a) \Leftarrow \begin{cases} U \in N(a) \\ V \supseteq U \end{cases}$

4) $\boxed{\underbrace{int(A)}_{A^\circ} \subseteq A \subseteq \underbrace{cl(A)}_{\bar{A}}}$.

5) לכל $A_1 \subseteq A_2$ מתקיים:

$$int(A_1) \subseteq int(A_2)$$

$$cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$$

$$scl(A_1) \subseteq scl(A_2)$$

6) קריטריון לפתיחות : $\boxed{A \text{ פתוחה} \Leftrightarrow int(A) = A}$

רמז: t_3. $A = \bigcup_{a \in A} O_a$

7) קריטריון לסגירות: $\boxed{A \text{ סגורה} \Leftrightarrow cl(A) = A}$

8) $A^{\circ\circ} = A^\circ$. (ז"א: $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$)

9) $A^\circ \in \tau$ (ז"א A° תמיד פתוחה).

10) $\boxed{(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ}$ (לכל מספר **סופי**).

11) A° = קב' פתוחה הכי גדולה בין תת קבוצות פתוחות של A, כלומר –

$$\bigcup\{O \subseteq X | O \subseteq A, O \in \tau\}$$

12) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ (ז"א $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$)

13) $\bar{A}$ תמיד קב' סגורה.

14) $\bar{A}$ = קב' סגורה הכי קטנה בין קבוצות סגורות שמכילות את A. כלומר

$$\bigcap\{B \subseteq X | B \supseteq A, X \text{ סגורה ב} B\}$$

15) (הפרשים) נניח O פתוחה, B סגורה. אזי:

א. $O \setminus B$ פתוחה. ב. $B \setminus O$ סגורה.

<u>הסבר:</u> $O \setminus B = O \cap B^c$ $B \setminus O = B \cap O^c$.

16) **משפט הקשר** בין הסגור והפנים. תמיד מתקיים:

א. $\boxed{cl(A^c) = \left(int(A)\right)^c}$

שקול: ב. $int(A^c) = \left(cl(A)\right)^c$

<u>הוכחה:</u> א $\Leftrightarrow$ ב כי נוכל להציב $A := A^c$. <u>מ"ל (א)</u>

$$x \in \left(int(A)\right)^c$$
$$\Updownarrow$$
$$x \notin int(A)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, U \in N(x) : U \nsubseteq A$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, U \in N(x) : U \cap A^c \neq \emptyset$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in cl(A^c)$$

☺

17) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (לכל מס' **סופי**).

<u>הגדרה:</u> השפה של A: $\partial(A) := \overline{A} \setminus A^{\circ}$

18) $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

<u>הסבר:</u> $\partial(A) = \overline{A} \setminus A^{\circ} = \bar{A} \cap (A^{\circ})^c \underbrace{=}_{16א.} \bar{A} \cap \overline{A^c}$

19) $\partial(A)$ תמיד סגורה!

<u>הסבר:</u> כחיתוך של קבוצות סגורות (ראו 18).

20) $\boxed{\partial(A) = \partial(A^c)}$

21) (במ"מ (X,d)) $\partial(A) = \{x \in X | d(x,A) = 0, d(x,A^c) = 0\}$

<u>הסבר:</u> תכונות הסגור במ"מ...

22) $cl(A) = A \cup \partial(A)$ $\quad \text{int}(A) = A \setminus \partial(A)$

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה A במ"ט (X,τ) נקראת *צפופה* אם $cl(A)=X$.

שקול: (קריטריון צפיפות) לכל קבוצה פתוחה לא ריקה O מתקיים $A\cap O\neq\varnothing$.

תרגיל: אם A צפופה ב X אז לכל קבוצה פתוחה O מתקיים: $cl(O)=cl(O\cap A)$.

<u>הגדרה</u>: מ"ט (X,τ) נקרא **ספרבילי** אם קיימת ת"ק צפופה <u>ובת מניה</u>.

סימון: $(X,\tau)\in \mathrm{Sep}$.

הערה: תמיד $cl(X)=X$. לכן תמיד X צפופה ב X. לכן מרחב טופולוגי בת מניה תמיד ספרבילי.

הערה: (*משפט* Weierstrass)

$(C[a,b],top(d_{\max}))=cl(P_{\mathbb{Q}}[a,b])=$ {פולינומים רציונליים}

לכן $(C[a,b],top(d_{\max}))\in Sep$.

<u>תרגילים מומלצים</u>:

- $\mathbb{R}^n\in \mathrm{Sep}$
- **הוכיחו:** $l_2\in \mathrm{Sep}$ (רמז: $A:=\{(q_1,q_2,\cdots)\in l_2 : q_k\in\mathbb{Q},\exists n\ \forall i>n\ \ q_i=0\}$)
- $(X,\tau_{discr})\in \mathrm{Sep}$ אם ורק אם X בת מניה.
- חיתוך של 2 (או מספר סופי) קבוצות פתוחות צפופות גם צפופה.
- יהי (X,d) מ"מ. תת קבוצה צפופה ב $(X,\mathrm{top(d)})$ אם ורק אם היא ε-צפופה לכל $\varepsilon>0$.
  הגדרה: A ε-צפופה ב (X,d) אם לכל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש $d(x,a)<\varepsilon$.
  שקול $\bigcup_{a\in A}B(a,\varepsilon)=X$.

* **הוכיחו:** $l_\infty\notin \mathrm{Sep}$

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה A במ"ט X נקראת <u>דלילה</u> (nowhere dense) אם $\mathrm{int}(cl(A))=\varnothing$.

למשל: קו ישיר דליל במישור. מישור דליל במרחב תלת ממדי.

נקודון במרחב מטרי דליל אם ורק אם היא לא מבודדת.

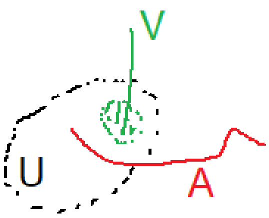
<u>משפט</u>: (**קריטריונים לקבוצות דלילות**) התנאים הבאים שקולים:

א. A דלילה במ"ט X (ז"א $\operatorname{int}(cl(A))=\varnothing$).

ב. $X\setminus cl(A)$ צפופה ב X.

ג. $cl(A)$ לא מכיל אף תת קבוצה פתוחה לא ריקה.

ד. לכל קבוצה פתוחה לא ריקה U קיימת קבוצה פתוחה V כך ש:
$V\cap A=\varnothing \quad \varnothing\neq V\subseteq U$.



הוכחה:

א $\Leftarrow$ ב

$\operatorname{int}(cl(A))=\varnothing$

$X\setminus \operatorname{int}(cl(A))=X$

מכאן, לפי **משפט הקשר**, נקבל

$cl(X\setminus cl(A))=X$

ב $\Leftarrow$ ג

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $\varnothing\neq O\subseteq cl(A)$. אז $O\cap(X\setminus cl(A))=\varnothing$.

מכאן $X\setminus cl(A)$ לא צפופה ב X (ראו קריטריון צפיפות).

ג $\Leftarrow$ ד

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $U\neq\varnothing$ כך שלכל ת"ק פתוחה $\varnothing\neq V\subseteq U$ מתקיים $V\cap A\neq\varnothing$

אז כל נקודה של U היא נקודת סגור של A. זאת אומרת $U\subseteq cl(A)$. סתירה לתנאי ג.

ד $\Leftarrow$ א

נניח בשלילה שלא. אז $U:=\operatorname{int}(cl(A))\neq\varnothing$. לכל ת"ק **פתוחה** $\varnothing\neq V\subseteq U$ מתקיים $\varnothing\neq V\subseteq \operatorname{int}(cl(A))\subseteq cl(A)$. אבל אז לפי הגדרת סגור $V\cap A\neq\varnothing$ סתירה לתנאי ד.

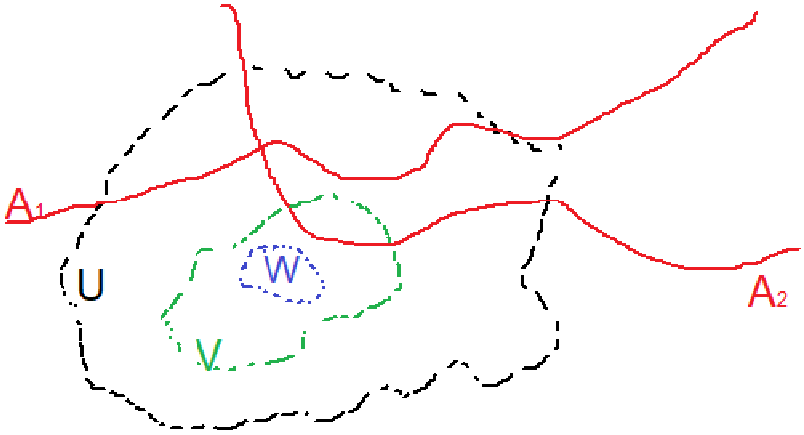
☺

תרגילים מומלצים:

1. A דלילה ב X אם"ם $cl(A)$ דלילה ב X.
2. אם A דלילה ב X אז A^c צפופה ב X.
3. איחוד בן מניה של קבוצות דלילות לא תמיד קבוצה דלילה.

<u>טענה</u>: איחוד **סופי** של קבוצות דלילות גם קבוצה דלילה.

הוכחה:
נניח A_1, A_2 דלילות ב X. צ"ל $A_1 \cup A_2$ דלילה ב X.



נשתמש בסעיף ד של המשפט.
נניח U פתוחה לא ריקה. A_1 דלילה ב X. לכן קיימת ק"פ V כך ש
$V \cap A_1 = \emptyset \quad \emptyset \neq V \subseteq U$.
A_2 דלילה ב X. לכן קיימת ק"פ W כך ש
$W \cap A_2 = \emptyset \quad \emptyset \neq W \subseteq V$.
אז $W \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset \quad \emptyset \neq W \subseteq U$.

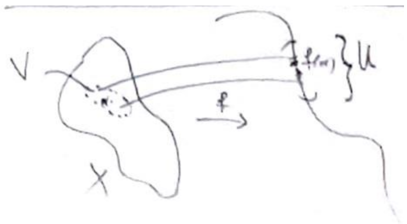
☺

<u>הגדרה</u>: מ"ט נקראת *מקטגוריה ראשונה* אם הוא איחוד בן מניה של קבוצות דלילות.
אחרת, הוא נקרא *מקטגוריה שניה*.

<u>הערה</u>: **<u>משפט Baire</u>** אומר שכל מרחב מטרי **שלם** הוא מקטגוריה שניה
(ראו למשל "טופולוגיה קבוצתית" של האוניברסיטה הפתוחה, כרך א, עמוד 89).
<u>משפט יותר חזק</u>: לכל מרחב מטרי שלם (או לכל מרחב קומפקטי מקומית האסדורפית)
חיתוך בן מנייה של קבוצות צפופות פתוחות הוא צפוף.

רציפות פונקציות

<u>תזכורת: (רציפות בנקודה):</u> נניח שנתונה פו' בין מ"ט $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$. f נקראת **רציפה בנקודה** $X \ni a$ אם: $\boxed{\forall\, U \in N\big(f(a)\big)\ \exists\, V \in N(a): f(V) \subseteq U}$



<u>שקול:</u> $\forall\, U \in N\big(f(a)\big): f^{-1}(U) \in N(a)$

(מילולית: מקור של סביבה (ל $f(a)$) גם סביבה (ל a)).

<u>משפט (קריטריון לרציפות):</u> נניח $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. התנאים שקולים:

1) f רציפה (בכל נקודה).

2) מקור של כל קב' פתוחה גם פתוחה.

3) מקור של כל קב' סגורה גם סגור.

4) $\forall\, A \subseteq X: z \in cl(A) \Rightarrow f(z) \in cl\big(f(A)\big)$.

5) $f\big(cl(A)\big) \subseteq cl\big(f(A)\big)$.

<u>הוכחה:</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח $O \in \sigma$. צ"ל $f^{-1}(O) \in \tau$.

לכל $a \in f^{-1}(O)$ צ"ל ש $a \in int\big(f^{-1}(O)\big)$

(קריטריון לפתיחות: A פתוחה $\Leftrightarrow int(A) = A$).

$$a \in f^{-1}(O)$$
$$\Downarrow$$
$$f(a) \in O \in \sigma$$
$$\Downarrow$$
$$O \in N\big(f(a)\big)$$

הגדרת הרציפות בנקודה a

$$\Downarrow$$

$$a \in f^{-1}(O) \in N(a)$$

הגדרת נקודות פנים

$$\Downarrow$$

$$a \in int\left(f^{-1}(O)\right)$$

$(2) \Leftrightarrow (3)$: כי $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$.

$(4) \Leftrightarrow (5)$: ברור.

נוכיח $(3) \Rightarrow (5)$:

נניח $A \subseteq X$. צ"ל $f\left(cl(A)\right) \subseteq cl\left(f(A)\right)$.

$$A \subseteq f^{-1}\left(f(A)\right) \subseteq f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)$$

המעבר האחרון נובע מזה ש $f(A) \subseteq cl\left(f(A)\right)$. נפעיל "$cl$" בשני האגפים:

$$cl(A) \subseteq cl\left(f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)\right) \overset{(*)}{=} f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)$$

(בהפעלת cl יש "מונוטוניות" $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$).

<u>הסבר $(*)$:</u>

א) $cl(B)$ סגור.

ב) נתון (3).

ג) B סגור $\Leftrightarrow cl(B) = B$.

כעת, נפעיל f על שני האגפים לקבל:

$$f\left(cl(A)\right) \subseteq ff^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right) \subseteq cl\left(f(A)\right)$$

נוכיח $(4) \Rightarrow (1)$:

נניח בשלילה ש - (1) לא נכון. ז"א, f לא רציפה בנקודה מסוימת $a \in X$.

ז"א, קיימת <u>סביבה פתוחה</u> U של $f(a)$ כך ש - $f^{-1}(U) \notin N(a)$.

שקול: $a \notin int\left(f^{-1}(U)\right)$

שקול: $cl\left(f^{-1}(U)^c\right) \underbrace{=}_{\text{תכונת הקשר}} \left(int\left(f^{-1}(U)\right)\right)^c \ni a$

בגלל נתון (4) נקבל:

$$f(a) \in cl\left(f\left(f^{-1}(U)^c\right)\right) = cl\left(f\left(f^{-1}(U^c)\right)\right) \subseteq cl(U^c) = U^c$$

(המעבר האחרון נובע כי U פתוחה ולכן $Y \setminus U$ סגורה, וסגור של סגורה שווה לעצמה).

קיבלנו: $f(a) \notin U$ בסתירה לנתון!

☺

משפט: ($\frac{1}{2}$-Heine) כל f רציפה שומרת על התכנסות סדרות.

הוכחה:

$$x_n \xrightarrow{\tau} a \underbrace{\Rightarrow}_{\text{צריך להוכיח}} f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(a)$$

שקול להוכיח – $\forall\, U \in N\big(f(a)\big)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

עבור $U \in N\big(f(a)\big)$ המקור $f^{-1}(U) \in N(a)$ (בגלל רציפות f בנקודה a).

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

וגם ידוע $f^{-1}(U) \in N(a)$ ולכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש – $x_n \in f^{-1}(U)$

מכאן $\forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

☺

הערה חשובה: במ"מ ההיפך גם נכון (עיקרון $Heine$). אבל זה לא תמיד נכון במ"ט ! (אפילו אם מתקיימת תכונת האוסדורף).

ראו דוגמה ב מתחילת ההרצאה

$id:(X,\tau) \to (X,\tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה.

תכונות נוספות של פונקציות רציפות:

- כל $(X,\tau_{discr}) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ תמיד רציפה.
- כל $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\tau_{tr})$ תמיד רציפה.
- הרכבה $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ של פונקציות רציפות $f_1 : X_1 \to X_2$

  $f_2 : X_2 \to X_3$ היא גם רציפה.
- הוכיחו שבכל במ"ט (X,τ) ולכל $f_1, f_2 \in C(X)$ מתקיים :

א) $f_1 + f_2 \in C(X)$.

ב) $f_1 \cdot f_2 \in C(X)$.

ג) $\frac{f_1}{f_2} \in C(X)$ בתנאי ש - $f_2(x) \neq 0$ לכל $x \in X$.

הערה: נוח לבדוק "דרך סביבות".

משפט (תורשתיות של רציפות): $f: X \to Y$ רציפה, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ כך ש $f(A) \subseteq B$. אזי פונקציה מושרית $\boxed{\begin{array}{c} A \overset{f_0}{\to} B \\ a \mapsto f(a) \end{array}}$ גם רציפה.

<u>הוכחה:</u>

בודקים לפי קריטריון רציפות מספר 2 (ז"א מקור של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח).

צ"ל שלכל קבוצה פתוחה $O \cap B$ (כאשר $O \in \tau_Y$) ב – B מתקיים $f_0^{-1}(O \cap B)$ פתוחה ב- A.

$$\begin{aligned} f_0^{-1}(O \cap B) &= \{x \in A | f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A \\ &= f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A \underbrace{=}_{f(A) \subseteq B} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\substack{X\text{פתוחה ב־} \\ f \text{ בגלל רציפות}}} \cap A \end{aligned}$$

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ קבוצה פתוחה ב A (תת מרחב).

☺

הרצאה 6

שאלה כללית: אילו תכונות נשמרות על ידי "תמונה רציפה" ?

בהמשך נוכיח זאת עבור מספר תכונות. למשל : ספרביליות , קשירות,

קשירות מסילתית, קומפקטיות, קומפקטיות סדרתית ...

(פונקציה **רציפה על** $f : X \to Y = f(X)$)

<u>**משפט:**</u> צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

<u>**הוכחה:**</u> נניח $f: X \to Y$ רציפה <u>על</u>, ז"א $f(X) = Y$.

צ"ל $\bar{A} = X \Leftarrow \overline{f(A)} = Y$.

שקול להוכיח $\overline{f(A)} = f(X)$.

לפי קריטריון (5) של רציפות מתקיים: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

נציב $\bar{A} = X$ ונקבל $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.

מצד שני, $\overline{f(A)} \subseteq Y = f(X)$.

לכן קיבלנו: $\overline{f(A)} = f(X) = Y$

והוכחנו שנשמרת צפיפות.

עכשיו אם ניקח $X \in Sep$ אז קיים $A \subseteq X$ כך ש - $\bar{A} = X$, $|A| \leq \aleph_0$.

אז $\overline{f(A)} = f(X) = Y$.

$|f(A)| \leq \aleph_0$ גם בת מנייה! מכאן גם $Y \in Sep$.

☺

<u>איזומורפיזמים במרחבים טופולוגיים</u>

תזכורת: איזומורפיזם ב $Metr$ = איזומטריות.

איזומורפיזם ב TOP = $homeomorphism$.

<u>**הגדרה:**</u> נניח $(X_1, \tau_1) \xrightarrow{f} (X_2, \tau_2)$ פונקציה בין מ"ט. f נקרא **הומיאומורפיזם**

(Homeomorphism   *<u>אזהרה</u>: זה לא Homomorphism*)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

א) f חח"ע + על (ז"א קיימת <u>פונקציה</u> f^{-1}).

ב) f רציפה.

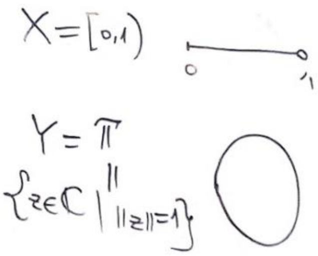
ג) f^{-1} רציפה.

<u>הערה:</u> $\begin{cases}(א)\\(ב)\end{cases} \not\Rightarrow (ג)$ אפילו במקרים טבעיים.

<u>דוגמה 1:</u> $f^{-1}:(\mathbb{R},\tau_{discr})\to\mathbb{R}$ רציפה אבל לא $f=id:\mathbb{R}\to(\mathbb{R},\tau_{discr})$

$\{0\}\in\tau_{discr}$ אבל $\{0\}\notin\tau$ $f^{-1}(0)=\{0\}$.

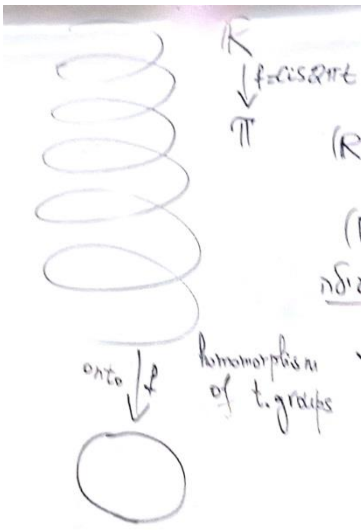
<u>דוגמה 2:</u> (גיאומטרית) $f:[0,1)\to T$

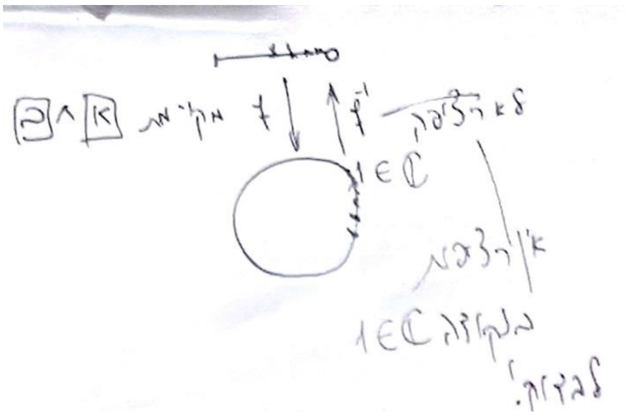


$$q:\mathbb{R}\to T:=\{z\in\mathbb{C}:\|z\|=1\},\quad q(t)=cis(2\pi t)=\cos(2\pi t)+i\sin(2\pi t)$$

זאת פונקציה רציפה (וגם הומומורפיזם חבורות).

כעת נגדיר צמצום של פונקציה הנ"ל $f:[0,1)\to T$.





אז $f:[0,1)\to T$ רציפה חח"ע ועל

אבל $f^{-1}:T\to[0,1)$ לא רציפה בנקודה $z=1\in T$.

(למצוא תת קבוצה פתוחה (סגורה) ב $[0,1)$ כך שהמקור לא פתוחה (לא סגורה) ב T)

<u>הגדרה:</u> נסמן $(X_1,\tau_1)\simeq(X_2,\tau_2)$ אם קיים $X_1\xrightarrow{f}X_2$ $homeomorphism$ ונגיד

מרחבים הומיאומורפיים.

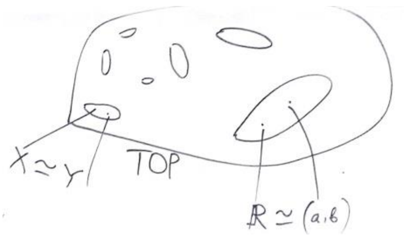
תכונות שמחלקות את TOP למחלקות :

1) $(X,\tau) \simeq (X,\tau)$.

2) $(X_2,\tau_2) \simeq (X_1,\tau_1) \Leftarrow (X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2)$.

3) $\begin{cases}(X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2) \\ (X_2,\tau_2) \simeq (X_3,\tau_3)\end{cases} \Rightarrow (X_1,\tau_1) \simeq (X_3,\tau_3)$.

(בשביל להוכיח את (1) משתמשים ב - id, בשביל (2) ב - f^{-1} ובשביל (3) $f_1 \circ f_2$).



<u>**שאלה חשובה**</u>: מתי 2 מרחבים טופולוגיים X,Y הם הומיאומורפיים

או ומתי לא ? $X \simeq Y$ או $X \not\simeq Y$

<u>**שאלה יותר כללית**</u>: מתי קיימת פונקציה רציפה **ועל** $X \xrightarrow{f} Y$ (ז"א מתי Y = "תמונה רציפה" של X).

<u>**הערה**</u>: מה התכונות שנשמרות ע"י הומיאומורפיזמים או ע"י תמונה רציפה ?

א) כל תכונה טופולוגית נשמרת ע"י הומיאומורפיזם.

ב) כל תכונה מטרית נשמרת ע"י איזומטריה.

דוגמאות להומיאומורפיזמים:

- הרכבה של פונקציות רציפות (הומיאומו') גם רציפה (הומיאומו').
- אם $f: X \to Y$ רציפה (הומיאומו') אז גם $f: A \to f(A)$ רציפה (הומיאומו').
- כל איזומטריה בעצם הומיאומורפיזם (ההיפך לא תמיד נכון!).
- בכל מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$: כפל בסקלר $c \neq 0$ תמיד הומיאומורפיזם
  $M_c: E \to E \in Lip_{|c|}$, $M_c(x) = c \cdot x$, $0 \neq c \in \mathbb{R}$ קבוע נתון.

$$\boxed{M_c^{-1} = M_{c^{-1}}}$$

- <u>**משפט**</u>: כל מרחב נורמי $\underbrace{\simeq}_{\text{הומיאומורפי}}$ לכל כדור פתוח שלו.

הוכחה:

שלב א' $\forall r > 0, \forall a \in E: B_r(a) \simeq B_1(0)$

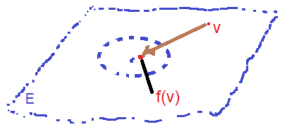
כי: $B_1(0) \underbrace{\simeq}_{M_r} B_r(0) \underbrace{\simeq}_{T_a} B_r(a)$

הערה: הרכבה של הומיאומורפיזם גם עם צמצום מלא (גם בטווח) הוא הומיאומורפיזם.

שלב ב' מ"ל ש: $E \underbrace{\simeq}_{f} B_1(0)$.

נגדיר $\boxed{f(v) = \frac{1}{1+\|v\|}\cdot v}$ $\quad f : E \to B(0_E,1)$

$$f(v) \in B(0_E,1) \Leftarrow \|f(v)\| = \left\|\frac{1}{1+\|v\|}v\right\| = \frac{\|v\|}{1+\|v\|} < 1$$



$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|}\cdot x \qquad f^{-1} : B(0_E,1) \to E$$

☺

תוצאות:

$$\mathbb{R} \simeq (-1,1) \simeq (a,b) \quad \forall a<b$$

$$\mathbb{R}^n \simeq B(\mathrm{v},r) \quad \forall \mathrm{v}\in\mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^2 \simeq \textbf{עיגול פתוח} \simeq (-a,a)\times(-a,a)$$

(רמז: $\|\ \|$ שקול טופולוגית ל $\|\ \|_{\max}$ ב $\mathbb{R}^2$)

הערה: הומיאומורפיזם לא תמיד שומר על תכונות מטריות (חסימות, שלמות, ...)

המשך דוגמאות:

- $[a,b] \simeq [c,d]$ כאשר $a<b\ , c<d$
- $(a,\infty) \simeq (c,d) \simeq (-\infty,b)$

(חלק מההסבר: $\mathbb{R} \underset{\overleftarrow{\log_2}}{\overset{\overrightarrow{2^x}}{\simeq}} (0,\infty)$).

תרגיל: למיין קטעים ב - $\mathbb{R}$:

א) עד כדי הומיאומורפיזמים (כן יחס שקילות!).

ב) עד כדי תמונה רציפה (לא יחס שקילות!).

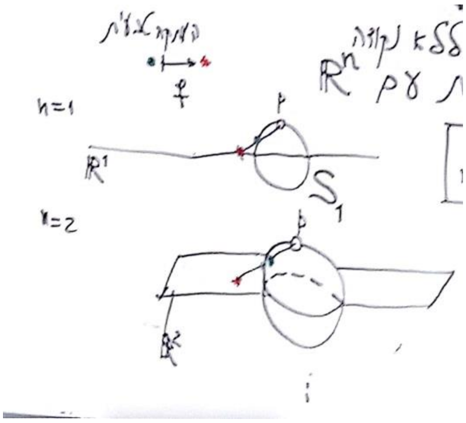
- [היטל סטריאוגרפי]

טענה: ספירה n מימדית S_n ללא נקודה אחת היא הומיאומורפית עם $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{S_n/\{z\} \simeq \mathbb{R}^n}$$

ניזכר כי: $S_n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$

למשל: כאשר $n = 1,2$ נגדיר f לפי:



קשירות

הערה: לכל מ"ט (X,τ) תת קבוצות $\emptyset, X$ תמיד סגוחות (כי $X = \emptyset^c$, $\emptyset = X^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

הגדרות: נניח (X,τ) מ"ט.

א) $X = X_1 \cup X_2$ נקרא **פירוק טופולוגי** אם:

$$\begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1, X_2 \text{ פתוחות} \\ \text{לא ריקות} \end{cases}$$

לתנאי השני שקול – סגורות, וגם שקול – **סגוחות**.

ב) אומרים (X,τ) **קשיר** $(Connected)$ ונסמן: $(X,\tau) \in Conn$ אם **לא** קיים פירוק טופולוגי

<u>הערה חשובה</u>: (X,τ) **לא קשיר** אם ורק אם קיימת תת קבוצה סגוחה לא ריקה ששונה מ X.

- אם: $\underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} = [2,4) \cup (5,\infty) \subset \mathbb{R}$

אז X **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ ו $[2,4)$ **סגוחות** ב X (לא ב $\mathbb{R}$).

- מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$X_1 = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap \left(\sqrt{2}, \infty\right)$$

- הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) הוא לא קשיר.

<u>הגדרה:</u> נניח $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2) \in TOP$ כך ש - $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$.

מגדירים **סכום טופולוגי** $X = X_1 \sqcup X_2$ <u>כקבוצה</u> $X = X_1 \cup X_2$ עם <u>טופולוגיה</u> הבאה

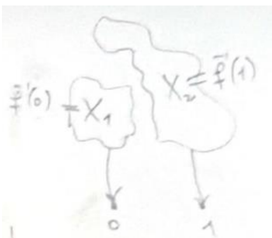
$$\tau := \{O_1 \cup O_2 | O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$$

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שמרחב לא קשיר אם"ם הוא הומיאומורפי לסכום טופולוגי.

<u>משפט:</u> התנאים הבאים שקולים:

1) $(X,\tau) \notin Conn$ (ז"א לא קשיר).

2) קיימת פונקציה רציפה – $X \xrightarrow{f} [0,1]$ כך ש $f(X) = \{0,1\}$



<u>הוכחה</u>: $2 \Leftarrow 1$ לפי משפט רציפות ש"ל מקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (יש 4 מקרים...)

$$f^{-1}(O) = \begin{cases} X & \{0,1\} \subset O \\ \varnothing & \{0,1\} \cap O = \varnothing \\ X_1 & \{0,1\} \cap O = \{0\} \\ X_2 & \{0,1\} \cap O = \{1\} \end{cases}$$

$2 \Rightarrow 1$ $\quad X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$ פירוק טופולוגי (מדוע ?)

☺

<u>שימו לב:</u> אין תכונת ערך ביניים! בהמשך זה נותן מחצית ל- "משפט ערך ביניים".

<u>תרגיל</u>: הוכיחו (הכללת המשפט הקודם) נקודות אי-רציפות של פונקציה האופיינית χ_A של $A \subseteq X$ היא $\partial(A)$. כאשר:

$$\chi_A : X \to \{0,1\},\ \chi_A(a) = 1 \quad \forall a \in A, \quad \chi_A(x) = 0 \quad \forall x \notin A$$

הערה: $A \subseteq X$ סגוחה אם ורק אם $\partial(A) = \varnothing$.

<u>משפט</u>: קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה:

נניח ש $X \in Conn$. מאחר ו- f על אז $f(X) = Y$. צ"ל $Y \in Conn$.

אם נניח שלא, אז Y פריק טופולוגית: $\quad Y = \underbrace{Y_1}_{\neq\emptyset} \sqcup \underbrace{Y_2}_{\neq\emptyset}$ כאשר Y_1, Y_2 פתוחות.

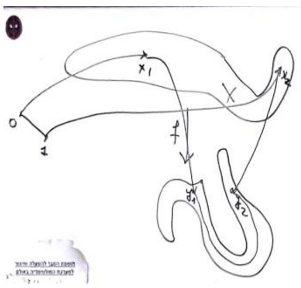
אזי $\quad X = f^{-1}(Y_1) \sqcup f^{-1}(Y_2)$

כאשר $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \neq \emptyset$ (כי f היא פונקציה על) וגם הן **פתוחות** כי f רציפה.
קיבלנו ש X פריק, ז"א $X \notin Conn$ בסתירה!

<u>הגדרה</u>: מ"ט X **קשיר מסילתית** אם לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה מ x ל y. **מסילה** מ x_1 ל x_2 $\quad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$. סימון: $\quad X \in PConn$.

<u>משפט</u>: קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה: נניח ש - $X \in PConn$. f על ורציפה אז $f(X) = Y$. צ"ל - $Y \in PConn$.



נניח $y_1, y_2 \in Y$, אז קיימים $x_1 \xrightarrow{f} y_1$, $x_2 \xrightarrow{f} y_2$ כי f על.

קיימת מסילה מ x_1 ל x_2 $\quad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$.

נגדיר מסילה – $\quad [0,1] \xrightarrow{f \circ \varphi} Y \qquad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y$

ואז מצאנו מסילה בין y_1 ל - y_2.

☺

אזהרה: תמונה $f[0,1]$ של המסילה לא תמיד הומיאומורפי ל $[0,1]$.

למשל ידוע שקיימת פונקציה רציפה **ועל** $f:[0,1]\to[0,1]^2$ (Peano curve).

__משפט__: $PConn \subset Conn$.

הוכחה: נניח $X \in PConn$. צ"ל $X \in Conn$.

אם נניח בשלילה שלא, אז X פריק: $X = X_1 \sqcup X_2$

נבחר $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

$X \in PConn \Leftarrow$ קיימת מסילה מ x_1 ל x_2, לכן

$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ $\quad \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$

כעת $[0,1] = \varphi^{-1}(X_1) \sqcup \varphi^{-1}(X_2)$

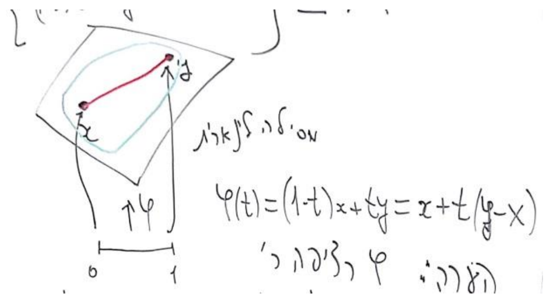
$\varphi^{-1}(X_1)$, $\varphi^{-1}(X_2)$ קבוצות זרות פתוחות (רציפות !)

לא ריקות $\quad (0 \in \varphi^{-1}(X_1), 1 \in \varphi^{-1}(X_2))$

ואז קיבלנו פירוק של $[0,1]$ בסתירה לכך ש - $[0,1] \in Conn$.

☺

הגדרה: תת קבוצה X במ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** $(convex)$ אם לכל $x, y \in X$ מתקיים $\{(1-t)x + ty: 0 \le t \le 1\} \subseteq X$ (מסילה לינארית) נסמן $X \in Conv$.



הערה:

φ רציפה כי $\varphi \in Lip_{\|y-x\|}$.

דוגמה: כל מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ וכדורים בתוכו (פתוחים, סגורים) קבוצות קמורות ב E.

טענה: $\boxed{Conv \subsetneq PConn \subsetneq Conn}$

הגדרה: $\emptyset \ne X \subseteq \mathbb{R}$ **קטע** אם לכל $a, b \in X$ מתקיים $[a, b] \subseteq X$