חשבון אינפי מתקדם
תרגיל 8 – פתרון

1. חשבו את האינטגרל הכפול בתחום הנתון :

א. $\iint\limits_D ydxdy$, D הוא התחום ברביע הראשון , הכלוא בין המעגל $x^2+y^2=25$ לבין הישר $x+y=5$.

<u>פתרון:</u>

תחום D נתון על ידי

$$\begin{Bmatrix} 0\le x\le 5 \\ 5-x\le y\le\sqrt{25-x^2} \end{Bmatrix}$$

ולכן

$$\iint\limits_D ydxdy=\int_0^5\left(\int_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} ydy\right)dx=\int_0^5 \frac{y^2}{2}\bigg|_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}}dx=\int_0^5\left(\frac{25-x^2}{2}-\frac{(5-x)^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{25}{2}x-\frac{x^3}{6}+\frac{(5-x)^3}{6}\bigg|_0^5=\frac{125}{6}$$

ב. $\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2}dxdy$, D הוא התחום בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,0),(1,1),(0,1)$.

<u>פתרון:</u>

תחום D נתון על ידי $D:\begin{Bmatrix} 0\le x\le 1 \\ x\le y\le 1 \end{Bmatrix}$ ולכן

$$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_x^1 \frac{1}{1+x^2}dy\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dp}{p}+\arctan x\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$$

ג. $\iint\limits_D \left(x^2-xy\right)dxdy$, D הוא התחום הכלוא בין $y=x$ ל- $y=3x-x^2$.

<u>פתרון:</u>

נקודות חיתוך של העקומות $y=x$ ו- $y=3x-x^2$ הן $x=2$, $x=0$

ולכן תחום D נתון על ידי $D:\begin{Bmatrix} 0\le x\le 2 \\ x\le y\le 3x-x^2 \end{Bmatrix}$

ואז

$$\iint_D \left(x^2-xy\right)dxdy=\int_0^2\left(\int_x^{3x-x^2}\left(x^2-xy\right)dy\right)dx=\int_0^2\left(x^2y-\frac{xy^2}{2}\Bigg|_x^{3x-x^2}dx\right)$$

$$=\int_0^2\left(x^2\left(3x-x^2\right)-\frac{x\left(3x-x^2\right)^2}{2}-x^3+\frac{x^3}{2}\right)dx=\int_0^2\left(\frac{5}{2}x^3-x^4-\frac{x\left(9x^2-6x^3+x^4\right)}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^2\left(-2x^3+2x^4-\frac{x^5}{2}\right)dx=-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{5}x^5-\frac{x^6}{12}\Bigg|_0^2=-\frac{8}{15}$$

.2 חשבו באמצעות אינטגרל כפול את השטח המישורי המוגבל ע"י העקומות הנתונות :

א. $y=\sin x$ ו- $y=\cos x$, בקטע $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

<u>פתרון:</u>

$S_D=\iint_D dxdy$ כאשר D נתון על ידי $D:\begin{cases}0\le x\le\frac{\pi}{4}\\ \sin x\le y\le\cos x\end{cases}$

ולכן $S_D=\int_0^{\pi/4}dx\int_{\sin x}^{\cos x}dy=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx=\left(\sin x+\cos x\right)\Big|_0^{\pi/4}=\sqrt{2}-1$

ב. $y^2=-x$ ו- $3y-x=4$.

<u>פתרון:</u>

נקודות חיתוך של העקומות $3y-x=4$ ו- $y^2=-x$ הן $y_1=1\,,\,y_2=-4$

ולכן תחום D נתון על ידי $D:\begin{cases}-4\le y\le 1\\ 3y-4\le x\le -y^2\end{cases}$

ואז

$$S_D=\iint_D dxdy=\int_{-4}^{1}dy\int_{3y-4}^{-y^2}dx=\int_{-4}^{1}(-y^2-3y+4)dy=\left(-\frac{y^3}{3}-\frac{3}{2}y^2+4y\right)\Bigg|_{-4}^{1}=\frac{125}{6}$$

.3 חשבו באמצעות אינטגרל כפול את נפח הגוף הנתון :

א. הגוף החסום ע"י הפרבולואיד $z=9x^2+y^2$ מלמעלה , ע"י המישור $z=0$ מלמטה ,
וע"י המישורים $x=0\,,\,y=0\,,\,x=3$ ו- $y=2$ מהצדדים .

<u>פתרון:</u>

עבור $z=0$ התחום הוא מלבן

$$\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

והגובה מעליו הוא $z=9x^2+y^2$
ולכן:

$$V=\int_0^2\left(\int_0^3\left(9x^2+y^2\right)dx\right)dy=\int_0^2\left(3x^3+y^2x\right)\Big|_0^3 dy=\int_0^2\left(81+3y^2\right)dy$$

$$=81\cdot 2+y^3\Big|_0^2=162+8=170$$

ב. הגוף הכלוא בין הגליל $x^2+y^2=25$ לגליל $x^2+z^2=25$.

<u>פתרון:</u>

ההיטל של הגוף על המישור $z=0$ נתון על ידי $x^2+y^2\le 25$ וגובה מעל התחום $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 25\right\}$ נתון ע"י $z=\sqrt{25-x^2}$ ולכן הנפח הוא

$$V=\underset{\nearrow}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 25}\sqrt{25-x^2}\,dxdy$$

כי התחום סימטרי ביחס
למישור xy

$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^5 r\sqrt{25-r^2\cos^2\theta}\,drd\theta$$

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\qquad |J|=r$$

$$0\le r\le 5$$

$$0\le\theta\le 2\pi$$

$$\left\{\begin{aligned}&25-r^2\cos^2\theta=p\\&-2r\cos^2\theta dr=dp\\&rdr=\frac{-1}{2\cos^2\theta}dp\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}&r=0\Rightarrow p=25\\&r=5\Rightarrow p=25\sin^2\theta\end{aligned}$$

ואז

$$V=2\int_0^{2\pi}\left(\int_{25}^{25\sin^2\theta}\frac{-1}{2\cos^2\theta}\sqrt{p}dp\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{2}{3}p^{3/2}\Big|_{25\sin^2\theta}^{25}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos^2\theta}\left(125-125|\sin\theta|^3\right)d\theta$$

$$=\underbrace{\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\frac{125}{\cos^2\theta}d\theta}_{=0}-\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}125\frac{|\sin\theta|^3}{\cos^2\theta}d\theta=-\frac{250}{3}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin\theta|^3}{\cos^2\theta}d\theta=$$

$$=-\frac{250}{3}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta+\frac{250}{3}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

נותר לחשב את האינטגרל:

$$\int \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} = \int \sin\theta \tan^2\theta d\theta = \int \sin\theta\left(-1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$= \int(-\sin\theta)d\theta + \int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \cos\theta - \underbrace{\int \frac{dp}{p^2}}_{\substack{p=\cos\theta \\ dp=-\sin\theta d\theta}} =$$

$$= \cos\theta + \frac{1}{p} = \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}$$

ולכן מקבלים

$$V = \frac{-250}{3}\left(\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}\bigg|_0^{\pi}\right) + \frac{250}{3}\left(\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}\bigg|_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{-250}{3}(-1-1-1-1) + \frac{250}{3}(1+1+1+1) = \frac{2000}{3}$$

4. החליפו את סדר האינטגרציה :

א. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dxdy$

<u>**פתרון:**</u>

$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{2} \\ y^2 \le x \le 2 \end{cases}$$

ולכן

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2}^{2} f(x,y)\,dx$$

ב. $\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)\,dxdy$

<u>**פתרון:**</u>

$$D:\begin{cases} 1 \le x \le e^y \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x \le e^2 \\ \ln x \le y \le 2 \end{cases}$$

ולכן

$$\int_0^2 dy \int_1^{e^y} f(x,y)\,dx = \int_1^{e^2} dx \int_{\ln x}^{2} f(x,y)\,dy$$

ג. $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{1-\left(x^2/4\right)}}^{\sqrt{1-\left(x^2/4\right)}} f\left(x,y\right)dydx$

פתרון:

$$D:\begin{cases}-2\le x\le 2\\ -\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}\le y\le \sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\le y\le 1\\ -\sqrt{4-4y^2}\le x\le \sqrt{4-4y^2}\end{cases}$$

ולכן

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f\left(x,y\right)dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-4y^2}}^{\sqrt{4-4y^2}} f\left(x,y\right)dx =$$

טל"ח