1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות (מעל $\mathbb{R}$)

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 15 & 3 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (עבור אילו ערכי a המטריצה הפיכה?)

2) תהי $A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ חשב את $adj(A)$ ואת $|A|$.

3) יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת מטריצת ונדרמונדה.

א. חשב את הדטרמיננטה של מטריצת ונדרמונדה.

[הדרכה: בצע $c_i \leftarrow c_i - a_1 c_{i-1}$ עבור $i= n, n-1,\ldots,2$ ופתח לפי שורה ראשונה]

ב. מתי מטריצת ונדרמונדה הפיכה?

4) הוכח

א. $adj(cA) = c^{n-1}adj(A)$

ב. אם A מטריצה אנטי סימטרית ממשית מגודל $n \times n$ כאשר n אי זוגי, אז $|A| = 0$

ג. אם ל $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ יש 2 שורות אפסים אז $adj(A) = 0$

ד. אם A ו- P מטריצות הפיכות מאותו סדר אז $adj(P^{-1}AP) = P^{-1}adj(A)P$

ה. $adj(A^t) = adj(A)^t$.

ו. אם $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הפיכה אז קיים $c \in \mathbb{C}$ כך ש $|cA| = 1$.

5) תהי $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה לינארית.עבור בסיסים C, D כלשהם של $\mathbb{R}^n$ נגדיר מטריצות מייצגות של T, $[T]_C = A$ ו- $[T]_D = B$. הוכח כי $|A| = |B|$.

6) השתמש בכלל קרמר כדי לפתור את

א.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 2z = 3 + 2z \\ 3x - 6z = 5 + 4y \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

7) נתונה מערכת משוואות $Ax = b$ כך שכל איברי A, b הם מספרים שלמים ובנוסף נתון כי $|A| = 1$. הוכח כי כל הפתרונות הם גם מספרים שלמים.

8) הוכח ש $|A_n| = (-1)^{n-1}$ כאשר $n \geq 2$ ו $A_n \in \mathbb{F}^{nxn}$ היא המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(הסבר: כל המקומות הריקים הם אפסים. מעל האלכסון הראשי יש אלכסון עם 1-ים, ובנוסף יש 1 בפינה השמאלית למטה)

[הדרכה: פתח לפי השורה הראשונה.]

9) נתון כי חמשת המספרים הבאים מתחלקים ב 17: 12342, 21029, 36601, 47277, 52292. הוכח כי גם הדטרמיננטה של המטריצה הבאה מתחלקת ב 17:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$